Université 8 mai 1945 – GUELMA. Année Universitaire 2022/2023

Faculté des sciences éco, com et sciences de gestion. T C première année L.M.D.

Examen du deuxième semestre : Mathématique II. Le 23/05/2023. **Durée (1 H + 59 m)**

Exercice n°1 (6 points) (Questions de cours)

Soient $\alpha \in IR^*$, A et B deux matrices **carrées**, **non nulles**, **inversibles** d'ordres $n \geq 2$. Les affirmations suivantes sont-elles **vraies** ou **fausses**? **Justifier** dans chaque cas.

(i) $\det(\alpha \times A) = \det(A^n)$

(ii) $\det(\alpha \times A^n) = (\alpha \times \det A)^n$

(iii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, (T est la transposée)

(iv) $\det(A \times B) = \det(B \times A)$

(v) $A \times B$ est nécessairement non nul ($A \times B \neq 0$).

(vi) $(\alpha \times A)^{-1} = \alpha \times (A^{-1})$

Exercice n°2 (5 points)

Soit le système d'équations $(S)\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x + 5y = 2 \\ x + 4y + 2z = 3 \end{cases}$

Résoudre par la méthode de **Gauss** le système (S)

Exercice n°3 (9 points)

Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

(i) Calculer s'il est possible : $B \times A$, $B \times C$, $C \times D$, $D \times C^T$

(ii) On pose : $E = D - I_2$. Calculer E^2 , en déduire D^2, D^3, D^n, $(n \in IN)$.

(iii) Déterminer les valeurs de α pour que A soit inversible.

(iv) Calculer A^{-1} par la méthode des cofacteurs de cramer dans le cas $\alpha = -1$ et en déduire dans ce cas les solutions de système de cramer $AX = B$

Fin.

Correction de l'examen de maths II, Le 23/05/2023

Ex 1 : (6pts) : (Questions de cours)

0,5

1) $\det(\alpha . A) = \det(A^n) \longrightarrow$ **Fausse**

En effet : $\det(\alpha A) = \alpha^n . \det A$ 0,5

mais $\det(A^n) = (\det A)^n$

(on en prend un contre exemple) 0,5

2) $\det(\alpha . A^n) = (\alpha . \det A)^n \longrightarrow$ **Vraie**

En effet : $\det(\alpha . A^n) = \alpha^n \times \det(A^n)$ 0,5

$= \alpha^n \times (\det A)^n = (\alpha \times \det A)^n$

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \longrightarrow$ **Vraie** 0,5

En effet : $(A \times A^{-1})^T = (A^{-1})^T \times A^T = I_n$ 0,5

d'où $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

0,5

4) $\det(A \times B) = \det(B \times A) \longrightarrow$ **Vraie**

En effet : $\det(A \times B) = \det A \times \det B$ 0,5

$\det(B \times A) = \det B \times \det A$

Vraie 0,5

5) $A \times B \neq 0 \longrightarrow$

En effet : Si $A \times B = 0$, alors 0,5

$A^{-1} \times A \times B = 0 \Rightarrow B = 0$ 0,5

(Contradiction car $B \neq 0$)

0,5

6) $(\alpha \times A)^{-1} = \alpha \times (A^{-1}) \longrightarrow$ **Fausse**

En effet : $(\alpha \times A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \times (A^{-1})$ 0,5

Ex2 (5 pts)

$$(S) : \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array}$$

0,5

Etape 1 : $l_1 = l_1$, $l_2 \leftarrow l_1 - 2 l_2$

et $l_3 \leftarrow l_1 - 2 l_3$

d'où (S) : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & 3 \\ 0 & -7 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}\begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array}$

1,5

Etape 2 : $l_1 = l_1$, $l_2 = l_2$

et $l_3 \leftarrow 7 l_2 - 9 l_3$

d'où (S) : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 24 \end{pmatrix}\begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array}$

1,5

$l_3 \Rightarrow z = \frac{24}{30} = \boxed{\frac{4}{5}}$ 0,5

$l_2 \Rightarrow y = \frac{-3-3z}{-9} = \boxed{\frac{3}{5}}$ 0,5

$l_1 \Rightarrow x = \frac{1-y-3z}{2} = \boxed{-1}$ 0,5

d'où les solutions de (S) sont

$S = \{(-1, 3/5, \frac{4}{5})\}$

Ex3 (9pts)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & -\alpha \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

1/ . $B \times A \longrightarrow$ impossible 0,25

. $B \times C \longrightarrow$ impossible 0,25

. $C \times D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -18 & -13 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$

. $D \times C^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 0,5

$= \begin{pmatrix} 8 & -6 & -1 \\ -6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 0,5 suite de l'ex 3) (0,25)

2) $E = D - I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$, $E^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d'où $E^2 = 0$ (0,25)

$D = E + I_2 \Rightarrow D^2 = (E + I_2)^2$

$D^2 = \underbrace{E^2}_{0} + \underbrace{2E \times I_2}_{2E} + \underbrace{I_2^2}_{I_2} = \boxed{2E + I_2}$ (0,25)

$D^3 = D^2 \times D = (2E + I_2)(E + I_2)$

$= \underbrace{2E^2}_{0} + \underbrace{3 \cdot E \cdot I_2}_{3I_2} + \underbrace{I_2^2}_{I_2}$

$= \boxed{3E + I_2}$ (0,25)

En générale : $\boxed{D^n = n \cdot E + I_2}$ (0,5)

3) Les valeurs de α pour que A soit inversible :

$\det A = 2\alpha(2 - \alpha) \neq 0$ (0,5)

d'où $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$ (0,5)

4) Si $\alpha = -1$ alors $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = -6$ (0,5)

(0,25)

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times C^T$, $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$

(0,25)

$C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, $C^T = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

(2,25) (0,25)

d'où $A^{-1} = \frac{-1}{6} \times \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & 0 \\ \frac{-2}{6} & \frac{-5}{6} & \frac{3}{6} \\ \frac{-4}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{3}{6} \end{pmatrix}}$ (0,5)

Les solutions de $AX = B$

$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$ (0,5)

$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & 0 \\ \frac{-2}{6} & \frac{-5}{6} & \frac{3}{6} \\ \frac{-4}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{3}{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (0,5)

d'où les solutions de (S)

donc : $S = \{(1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2})\}$