وزارة التعليـــــــم العـــــــــالي والبحث العلمي

جامعــة 8 مـــــاي 1945 قالمـــة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قســـم العلـــــــوم التجارية

مطبوعة خاصة بمقياس

الإحصاءII

إعداد:

د. بشيشي وليد   د. سماعلي فوزي

السنة الجامعية: 2020/2019

فهرس المحتويات

المتغير العشوائي المستمر (المتصل) ***Continuous Probability Distributions***

التوزيعات الاحتمالية المنفصلة ***The Discrete Probability Distributions***

اولا: التوزيع ذي الحدين الاحتمالي ***The Binomial Distribution***

ثانيا: التوزيع البواسوني ***The Poisson Distribution***

القسم الأول: التحليل التو افقي

يهدف التحليل التو افقي الى تحديد عدد الطرق الممكنة للمجموعة ضمن شروط معينة وبقواعد رياضية تسهل هذا التكوين من جهة وتمكن من دراسة المجموعات المنتهية من خلال تبسيط العد بها واستنباط طرق أكثر فعالية لحساب عدد الحالات المو اتية (الملائمة) وعدد الحالات الممكنة المرتبطة بذلك الحادث، وبالتالي يصبح حساب الاحتمالات من أهم التطبيقات العملية للتحليل التو افقي، وعليه فانه سيتم في هذا المحور التركيز على الموضوعات التالية:

_ التبادل.*Les Permutations*

_ التر اتيب.*Les Arrangements*

_ التو افيق. *Les Combinaisons*

وقبل التطرق الى هذه المواضيع لابد من التطرق الى مبدأ طرق العد

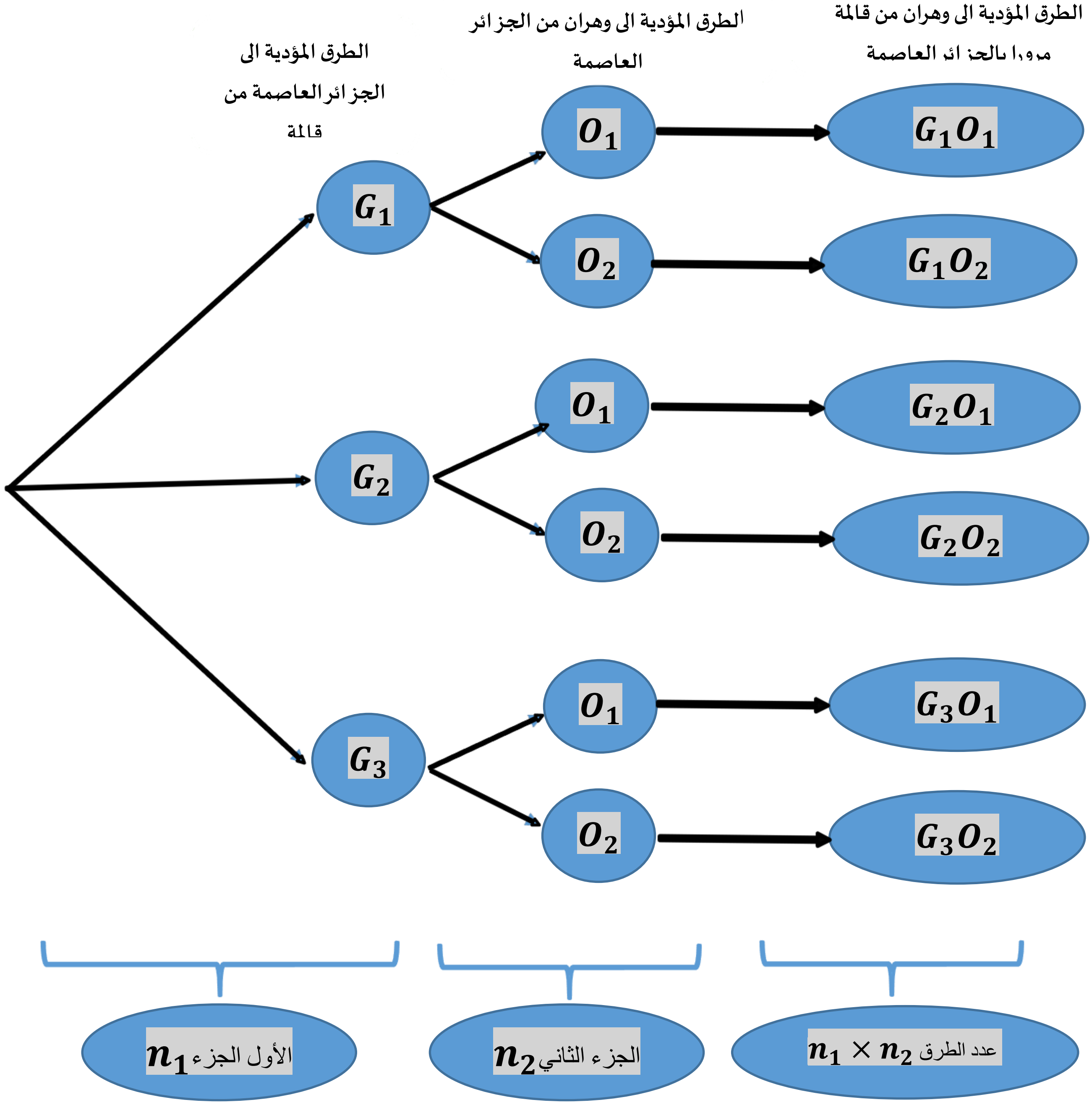
مبدأ طرق العد

مبدأ الضرب: يعتمد مبدأ طرق العد على أنه إذا أمكن القيام بعمل ما بـ n_1 طريقة مختلفة، وإذا امكن القيام بعمل آخر بـ: n_2 طريقة مختلفة وهذا من أجل كل طريقة من الطرق السابقة فيمكن القيام بالعملين معا _ بآن واحد _ بعدد من الطرق مساو الى $n_1 \times n_2$ طريقة ممكنة. ويمكن تعميم هذ المبدأ على أكثر من عاملين، والمثال التالي يوضح ذلك.

إذا كان لدينا ثلاث طرق للوصول من مدينة قالمة إلى الجزائر، ومن الجزائر إلى وهران لدين طريقين فما هي عدد الطرق الممكن للوصول إلى وهران.

حتى يتم تحليل التمرين وفهمه أكثر سندرج المخطط التالي:

حيث أننا سنرمز للطرق المؤدي الى الجزائر بالرمز $G_1G_2G_3$ على الترتيب أما الطرق المؤدية إلى وهران بالرمز التالي O_1O_2 على الترتيب



من خلال الشكل نلاحظ أن عدد الطرق المؤدية إلى ولاية وهران هو 6 طرق وبالتالي العملية التي يمكن تطبيقها هي: عدد الطرق في المرحلة الأولى ضرب عدد الطرق في الحالة الثانية

$$n_1 \times n_2 = 2 \times 3 = 6$$

وإذا كان لدينا أكثر من مرحلتين فتكون القاعدة كالتالي:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \dots \dots \dots \dots \dots n_N$$

مبدأ الجمع: إذا كنا نريد حدوث طريقة واحدة إما الحدث الأول أو الحدث الثاني وليس حدوث الاثنين معا فإن ذلك يطلب استخدام الجمع ولي الضرب أي: $(N_1 + N_2)$ طريقة.

مثال: إذا أراد د السفر الى مدينة وهران من مدينة قالمة ولديه أربع طرق اذا اتخذ طريق عنابة وثلاث طرق اذا تبع طريق قسنطينة، بكم طريقة يمكن أن يصل الى وهران.

الحل: عدد الطرق الممكن اتباعها هو $4 + 3 = 7$

الفرق بين هذا المثال والمثال السابق أنه في الحالة الأولى كان لابد وان يتم دمج طريقين حتى الوصول، لذلك استخدمنا الضرب، أما في هذا المثال فكل طريق مستقل عن الاخر وبالتالي استخدمنا عملية الجمع.

ملاحظة:

عند استخدام (و) نقصد عملية الضرب مثلا في المثال الأول نستخدم طريق قالمة الجزائر و الطريق الأول الى وهران، في هذه الحالة استخدمنا حرف (و) وبالتالي نعوضه بعملية الضرب.

عند استخدام (أو) نقصد عملية الجمع مثلا في المثال الثاني نستخدم احد الطرق فلا يوجد ارتباط بين الطرق، أي نستخدم الطريق الأول أو الثاني وبذالك نستخدم عملية الجمع

1__ التبادل. *Les Permutations*

يمكن ان نميز في التبادل بين حالتين مهمتين وهما:

_ التبادل دون تكرار

_ التبادل مع التكرار

1_1 التبادل دون تكرار

يمكن أن نسمي ترتيب N من العناصر المختلفة بأنه تبديلة هذه العناصر مأخوذة K في كل مرة، بشرط أن تؤخذ جميع العناصر أي $N = K$. أ هي عدد المجموعات التي يمكن تشكيلها من هذه العناصر التي تختلف باختلاف ترتيب هذه العناصر على الأقل، ويعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$p_n = n!$$

$n!$: يقرأ n عاملي أو مضروب n. حيث أن:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4) \times \dots\dots\dots (n-n)!$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \times (2-1) = 2$$

$$3! = 3 \times (3-1) \times (3-2)$$

$$4! = 4 \times (4-1) \times (4-2) \times (4-3)$$

$$10! = n \times (10-1) \times (10-2) \times (10-3) \times (n10-4) \times \dots\dots\dots (10-9)$$

مثال:

ماهي عدد الطرق الممكنة لترتيب الأرقام التالية دون تكرار: $n = \{1; 2; 3\}$

الطرق الممكنة الكلية دون تكرار هي كالتالي:

$$\{1; 2; 3\}$$

$$\{1; 3; 2\}$$

$$\{2; 1; 3\}$$

$$\{2; 3; 1\}$$

$$\{3; 1; 2\}$$

$$\{3; 2; 1\}$$

نلاحظ أن عدد الطرق الممكنة لترتيب هذه الأرقام هو 6 طرق، كل طريقة من هذه الطرق تسمى تبديلة، بمعنى انه لدينا 6 تبديلات ممكنة لهذ الأرقام دون تكرار

ويمكن حسابها بالطريقة التالي:

$$p_3 = 3! = 3 \times (3-1) \times (3-2) \times (3-3)!$$

أي

$$p_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 \times 0!$$

ومنه:

$$p_3 = 3! = 6$$

ملاحظة

بالنسبة للتكرار ليس من الضروري ان يكون في المعطيات لأنه في بعض الحالات لا يحدد لنا هل التبديل دون اكرار ام لا لأنه يستحيل فيه الترار مثلا ترتيب مجموعة من الكتب في هذه الحالة التكرار مستحيل لانها ايمكن وضع كتاب في نفس الوقت في عدة ترتيبات

في حالة العدد الكلي اكبر من الترتيبات، مثلا تشكيل كلمة مكونة من ثلاث حروف مع العلم ان الحروف المتاحة هي خمسة حروف، يمكن تعريف ذلك كما يلي:

نفرض أن لدينا n مقعدا مرقما وهناك N شخصا لمعرفة عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها ملء المقاعد. المقعد الأول له N طريقة، والثاني له $N-1$ طريقة، والثالث $N-2$ طريقة وهكذا حتى المقعد الأخيرويمكن لأن يملأ بـــ $N-(n+1)$ طريقة.

أي أن: عدد الطرق المختلفة لملء المقاعد هو

$$N(N-1)(N-2)(N-3)\ldots\ldots(N-1)$$

أي: $P_n^N = \frac{N!}{(N-n)!}$

هذا العدد يسمى N تبادلي n $(N\ permutation)$ ويرمزله بالرمز P_n^N

أي

مثال: ماهي عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها من هذه الحروفA B C D E إذا كان:

1 إذا اكانت الكلمة مكونة من خمسة حروف لا يهم المعنى

2 إذا اكانت الكلمة مكونة من ثلاثة حروف لا يهم المعنى

الحالة الأولى: عدد الحروف الإجمالي يساوي العدد المطلوب تشكيل كلمة منه وبالتالي تكون كالتالي:

$$p_5 = 5! = 5 \times (5-1) \times (5-2) \times (5-3) \times (5-4) \times (5-5)!$$

ومنه

$$p_5 = 5\,! = 120$$

بمعنى ان هناك 120 تديلة يمكن شكيل بها هذه الحروف الخمسة من اجمالي خمسة حروف وذلك دون تكرار الحرف

أي: $P_n^N = \frac{N!}{(N-n)!}$

حيث أن N هي العدد الاجمال و n هي العدد الذي يراد ترتيبه

وبما أن العدد الإجمالي للحروف هو $N = 5$ وعدد الحروف المطلوب إيجاد عدد التباديل الممكنة لها هو $n = 5$

ملاحظة يمكن حل العملية باستخدام القانون التالي: $P_n^N = \frac{N!}{(N-n)!}$ أيضا

$$P_5^5 = \frac{5!}{(5-5)!} = 5! = 120$$

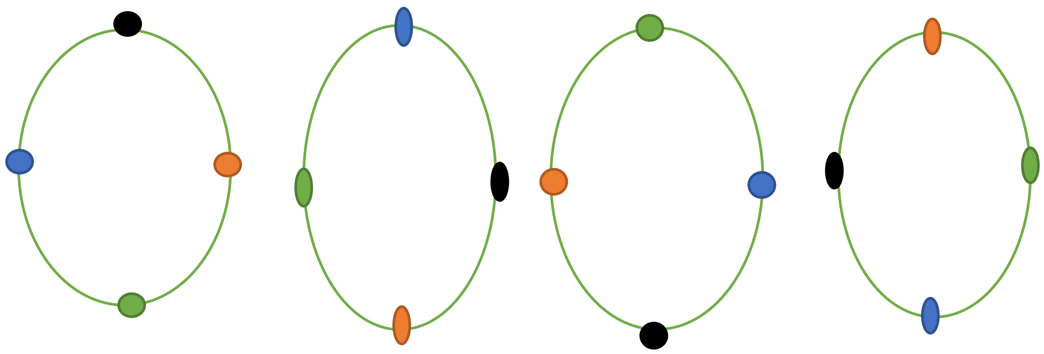
الحالة الثانية: عدد الحروف الإجمالي أقل من العدد المطلوب تشكيل كلمة منه وبالتالي تكون كالتالي:

$$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

أي أن عدد التبديلات الممكنة لثلاثة حروف من خمسة حروف هو 60 تبديلة ممكنة دون تكرار

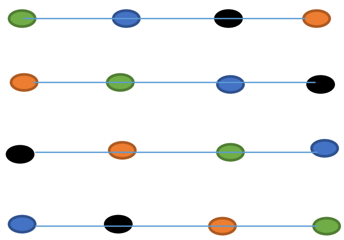
التبديل الدائرية

ـحتى يتم فهم التباديل الدائرية لابد ان نطلع على الشكل التالي:

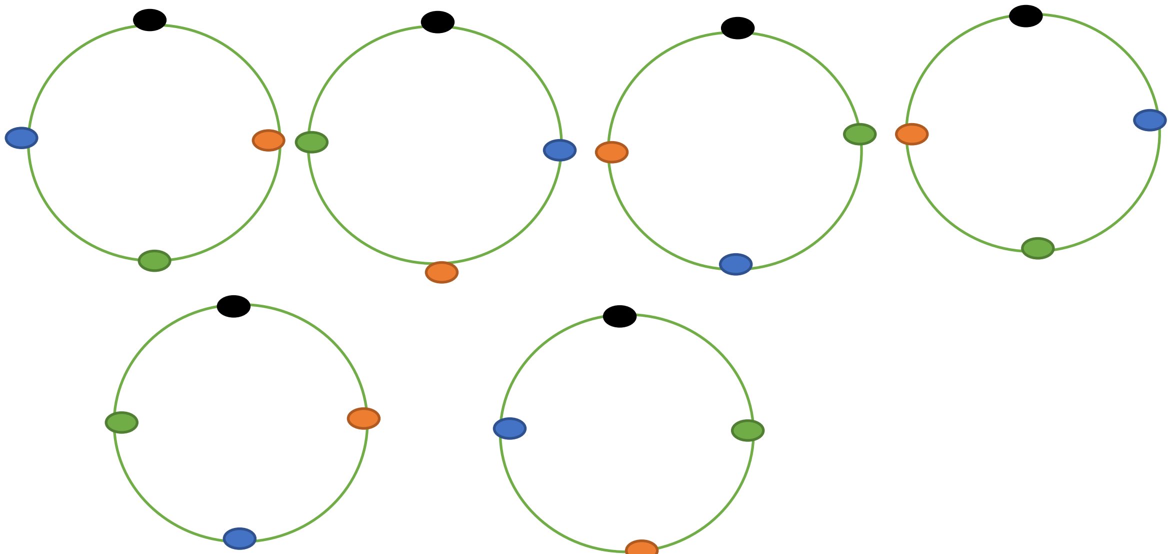


من خلال الشكل أعلاه نلاحظ انه يبدوا ان هناك تباديل متغيرة وذلك بإزاحة كل لون رتبة واحدة الا ان كل لون بقي من قبله وبعده نفسهم أي وكاه م إدارة الدائرة

لكن إذا كانت هذه الألوان في ط مستقيم وتم ازاحتها درجة واحدة كالتالي نجد أنه حدث تغير فاللون الاسود مثلا كان قبله لون ازرق وبعده لون برتقالي لون ازرق وبعده لون برتقالي إلا أنه بعد إزاحة اللون رتبة واحدة نجد ان اللون الأسود لم يصبح بعده أي لون؛ أي تغير موضع الألوان اللون الأخير اصبح اللون الأول، وهذا عكس ما نجده في الألوان المتموضعة دائريا.



<u>من هنا لابد ان نقوم في حالة التباديل الدائرية بتثبيت أحد العناصر دون ان يتم غير مكانه وبالتالي فكل العناصر تتغير حسب هذا العنصر الثابت أي بمثابة بوصلة لتحديد التغيرات، وفي هذا المثال سنقوم بتثبيت اللون الأسود واعتباره بوصلة التغيرات</u>



من خلال الشكل السابق نلاحظ أن لدينا 6 تبديلات وبالتالي القانون في حالة التبديلات الدائرية هو

$$p_n = (n-1)!$$
$$p_4 = (4-1)!$$
$$3! = 3 \times (3-1) \times (3-2)$$
$$3! = 6$$

مع العلم ان هذه التباديل الدائرية هي حالة خاصة وهي تعتمد على طرح واحد من العدد الإجمالي وحساب العدد العاملي للباقي.

مثال: بكم طريقة يمكن ان يجلس وفد دبلوماسي مكن من 9 أشخاص في طاولة دائرية؟

بما أن الطاولة دائرية فهذا يعني أنه لابد وأن يكون أحد افراد الوفد في مكان ثابت حتى يتمكن الأشخاص الاخرين تغيير تبديلاتهم بناء عليه.

$$p_n = (n-1)!$$

$$p_9 = (9-1)!$$

$$8! = 40320$$

وبالتالي فان عدد التبديلات الممكنة هو 40320 تبديلة

التبادل مع التكرار

في بعض الحالات لا يمكن أن نفرق بين عناصر المجموعة n أي عندما كون العناصر متماثلة. في هذه الحالة يمكن معرفة عدد التباديل من خلال الصيغة العامة التالية:

$$P_n^{n_1 n_2 n_3 \ldots\ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots \ldots \ldots . n_k!}$$

حيث أن كل من n_1 حتى n_k تمثل العناصر المتماثلة حيث:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots \ldots \ldots . n_k = n$$

وحتى يتم توضيح وبرهنة هذه النظرية، نفترض أننا نريد تكوين جميع التباديل الممكنة دون النظر الى معنى الكلمة وذلك باستخدام الحروف التالية: **WZWWG**، في الحالة العدية يكون عدد التباديل ممكنة لخمسة حروف ليست متكررة هو 120 بديلة تم حسابها كما يلي: $5! = 120$

مع العلم ان هذه الحروف نعتبرها ليست متكررة $W_1ZW_2W_3G$ حيث تم التفرقة بين الحروف المكررة عن طريق الترقيم $W_1W_2W_3$

فاذا تم القيام بالتبديلات التالي:

$$W_1W_2W_3ZG$$
$$W_1W_3W_2ZG$$
$$W_2W_1W_3ZG$$
$$W_2W_3W_1ZG$$
$$W_3W_2W_1ZG$$
$$W_3W_1W_2ZG$$

نلاحظ أن هناك 6 تبديلات في حالة ما إذا فرقنا بين الحرف المكرر ثلاث مرات بالأرقام وهو ناتج من حساب $3! = 6$ لكن الملاحظ هنا أنه إذا حذفنا الأرقام فأن الست 6 تبديلات سوف تصبح تبديلة واحدة كالتالي:

$$WWWZG$$
$$WWWZG$$
$$WWWZG$$
$$WWWZG$$
$$WWWZG$$
$$WWWZG$$

نلاحظ أن كل التبديلات عبارة عن تبديلة واحدة؛ أي أنه لدينا تبديلة واحدة وليس 6 ستة تبديلات لذلك حتى يتم التخلص من التكرار الذي ليس له معنى في التبديلات لابد من أن نقسم على عدد التبديلاة المكررة وهنا هو 6 أي $3! = 6$ ومنه لحساب التبديلات في هذه الحالة التي فيها رقم واحد مكرر نقوم بما يلي:

$$\frac{5!}{3!}=\frac{120}{6}=20$$

<u>مثال1:</u> احسب عدد التباديل المختلفة الممكن تكوينها من الحروف التالية بغض النظر عن المعنى:

pozzozrapoana

<u>الحل:</u>

نلاحظ أن هناك احرف متكررة وبالتالي لا يمكن التمييز بها في عملية التبديل وتكرار الحروف كالتالي:

حرف p متكرر مرتين $n_1 = 2$

حرف o متكرر ثلاث مرات $n_2 = 3$

حرف z متكرر ثلاث مرات $n_3 = 3$

حرف r متكرر مرة واحدة $n_4 = 1$

حرف a متكرر ثلاث مرات $n_5 = 3$

حرف n متكرر مرة واحدة $n_6 = 1$

وبالتالي يمكن تطبيق القانون التالي:

$$P_n^{n_1 n_2 n_3 \dots\dots n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \dots \dots \dots .\, n_k!}$$

$$P_{13}^{2\times3\times3\times1\times3\times1} = \frac{13!}{2!\,3!\,3!\,1!\,3!\,1!} = 1108800$$

<u>مثال 2:</u> اوجد عدد الطرق الممكنة لترتيب 8 كرات خمسة حمراء و اثنين بيضاء وواحدة زرقاء

<u>الحل:</u>

بما ان هناك الوان فيها تكرارات لذلك نستخدم العلاقة التالي:

نرمز للكرات الحمراء بـ $n_1 = 5$

نرمز للكرات البيضاء بـ $n_2 = 2$

نرمز للكرات الزرقاء بـ $n_3 = 1$

وبالتالي يمكن تطبيق القانون التالي:

$$P_n^{n_1 n_2 n_3} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!}$$

بالتعويض نحصل على:

$$P_8^{5\times2\times1} = \frac{8!}{5!\,2!\,1!} = 168$$

ومنه هناك 168 تبديلة يمكن الحصول عليها في هذه الحالة

2__ الترا تيب. *Les Arrangements*

الترتيبات: هي وضع مرتب لمجموعة من الأشياء ليست مأخوذة جميعها؛ أي جزء من الكل.

2_1__التراتيب دون تكرار.

إذا كان لدينا الاحرف التالية

$$WSZG$$

وطلب منا ترتيبها اثنين اثنين بترتيبات مختلفة دون تكرار:

$$\langle WS\ |WZ|WG\rangle$$
$$\langle SW\ |SZ|SG\rangle$$
$$\langle ZW\ |ZS|ZG\rangle$$
$$\langle GW\ |GS|GZ\rangle$$

نلاحظ أننا حصلنا على 12 ترتيبة

وحتى نبين بطريقة أخرى نلاحظ الشكل التالي:

تلخيص عملية الترتيب	
في الحالة الأولى لدينا أربع حروف يمكن أن نضعها في الترتيب الأول	في الحالة الثانية لدين فقط ثلاث اختيارات لأننا نكون قد وضعنا حرف في الحالة الأولى
4	3
وبالتالي بما أن الحروف مع بعضها أي نستخدم عملية الضرب لنجد3×4 والنتيج هي 12	

ويمكن حسابه من خلال القاعدة التالي:

إن ترتيب p عنصرا اخترناه من بين n عنصرا وهو تشكيل مرتب لـ p من n عنصرا، حيث كل واحد منها يظهر مرة واحدة على الأكثر في نفس الترتيب

إذا رمزنا بـ A_n^p إلى عدد الترتيبات

p عنصرا مختارا من بين n ، $p = 2$

n العدد الكلي $n = 4$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p))!} = A_4^2 = \frac{4!}{(4-2))!} = \frac{4!}{(2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{(2)!} = 4 \times 3 = 12$$

ومنه عدد الترتيبات الممكنة دون تكرار هو 12

مثال: لدينا **خمسة** مرشحين للانتخابات الرئاسية سينتقل منهم **اثنين** أحدهما رئيس والأخر نائب، فما هو عدد التراتيب الممكنة.

تلخيص عملية الترتيب	
في الحالة الأولى لدينا خمسة مرشحين يمكن أن يكون أي منهم في الترتيب الأول يعني خمسة خيارات	في الحالة الثانية لدين فقط أربع مرشحين لأننا نكون قد اخترنا مرشحا في الحالة الأولى
5	4
وبالتالي بما أن الحروف مع بعضها أي نستخدم عملية الضرب لنجد5×4 والنتيجة هي 20	

إذا رمزنا بـ A_n^p إلى عدد الترتيبات

p عنصرا مختارا من بين n ، $p = 2$

n العدد الكلي $n = 5$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p))!} = A_5^2 = \frac{5!}{(5-2))!} = \frac{5!}{(3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{(3)!} = 5 \times 4 = 20$$

ومنه عدد الترتبات الممكنة لاختياررئيس ونائب مع ال هو 20 ترتيبة

2_1__ التراتيب مع التكرار.

نقصد بالتراتيب مع التكرار إمكانية اختار عنصر p من بين العناصر المتاحة أكثر من مرة والمثال التالي يوضح ذلك:

إذا كان لدينا الاحرف التالية

$$WSZG$$

وطلب منا ترتيبها اثنين اثنين بترتيبات مختلفة مع التكرار:

$$\langle WS\ |WZ|WG|WW\rangle$$
$$\langle SW\ |SZ|SG|SS\rangle$$
$$\langle ZW\ |ZS|ZG|ZZ\rangle$$
$$\langle GW\ |GS|GZ|GG\rangle$$

نلاحظ أننا حصلنا على 16 ترتيبة

وحتى نبين بطريقة أخرى نلاحظ الشكل التالي:

تلخيص عملية الترتيب	
في الحالة الأولى لدينا أربع حروف يمكن أن نضعها في الترتيب الأول	في الحالة الثانية لدين أيضا أربع اختيارات لأنه مسموح بتكرار الحرف الذي اختير سابقا
4	4
وبالتالي بما أن الحروف مع بعضها أي نستخدم عملية الضرب لنجد 4×4 والنتيجة هي 16	

حيث أن العملية الحسابية التي حسبنا بها هي 4×4 أي: 4^2

وبما أن

p عنصرا مختارا من بين n ، $p = 2$

n العدد الكلي $n = 4$

نرمزللترتيبات مع التكراربالرمز $\widehat{A_n^p} = \underbrace{n \times n \times n \times n \times \dots\dots \times n} = n^p$

حيث أن: n يمثل العدد الإجمالي

p يمثل العدد الذي نختاره من العدد الإجمالي لأجل ترتيبه

مثال للمقارنة:

إذا كان لدينا الأرقام التالية: 0،2،4،6،8،9،1 فماهي عدد الطرق التي يمكن أن نحصل بها على ترتيبات مكونة من أربعة أرقام في حالة التكراروفي حالة عدمه

لدينا:	
p عنصرا مختارا من بين n ، $p = 4$ n العدد الكلي $n\{1،9،8،6،4،2،0\} = 7$	
في حالة التكرار	في حالة عدم التكرار
$\widehat{A_7^4} = \underbrace{7 \times 7 \times 7 \times 7} = 7^4 = 2401$	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p))!} = A_7^4 = \frac{7!}{(7-4))!} = \frac{7!}{(3)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{(3)!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$
2401	840
نلاحظ أن عدد الترتيبات في حالة التكرارأكبرمنها في حالة ‘دم التكرارأي: $\widehat{A_n^p} > A_n^p$	
تتساوى الترتيبات في حالة التكرارات وعدم التكرارات الا إذا كان $p = 1$	

3_ التوفيقات.*Les Combinaisons*

التو افيق هي اختيارعدد من المفردات بحجم P من مجموعة كبيرة بحجم n وبدون ترتيب حيث، $p \leq n$ ، والمثال التالي يبين التوفيقات:

لدينا أربع كرات متجانسة وملونة بالألوان التالية: أحمر R ، أبيض B ، أزرق P ، اسود N . ونريد أن نختار اثنين من الكريات، وبالتالي تكون الطرق الممكنة للاختيار كما يلي:

$$\text{التوفيقات الممكنة} \begin{cases} NP \\ NB \\ NR \\ PB \\ PR \\ BR \end{cases}$$

نلاحظ أن لدينا 6 توفيقات ممكنة

ملاحظة:

التوفيقات تشبه الترتيبات لكن في هذه الحالة التشكيلتين $\begin{cases} NP \\ PN \end{cases}$ نعتبرهما تشكيلة واحدة فمثلا عند دخلك لمحل بهدف شراء قلم احمر وقلم أزرق، نعتبر قولك لصاحب المكتبة أعطيني قلم احمر وقلم أزرق أو اعطيني قلم أزرق وقلم أحمر نفس الشيء.

تعريف: إن تو افقية عنصرا P اخترناه من بين N عنصرا هي تشكيل غير مرتب لهذه العناصر حيث يظهر كل واحد منها مرة واحدة على الأكثر.

نرمز بـ C_n^P وأحيانا $\binom{n}{p}$ إلى عدد التوفيقات الممكن إجراؤها بواسطة p عنصرا نختاره من بين n حيث أن $p \leq n$

$$C_n^P = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

بالعودة إلى المثال السابق: لدينا أربع كرات متجانسة وملونة بالألوان التالية: أحمر $\boldsymbol{R}$ ، أبيض $\boldsymbol{B}$ ، أزرق $\boldsymbol{P}$ ، اسود $\boldsymbol{N}$. ونريد أن نختار اثنين من الكريات، وبالتالي تكون الطرق الممكنة للاختيار كما يلي:

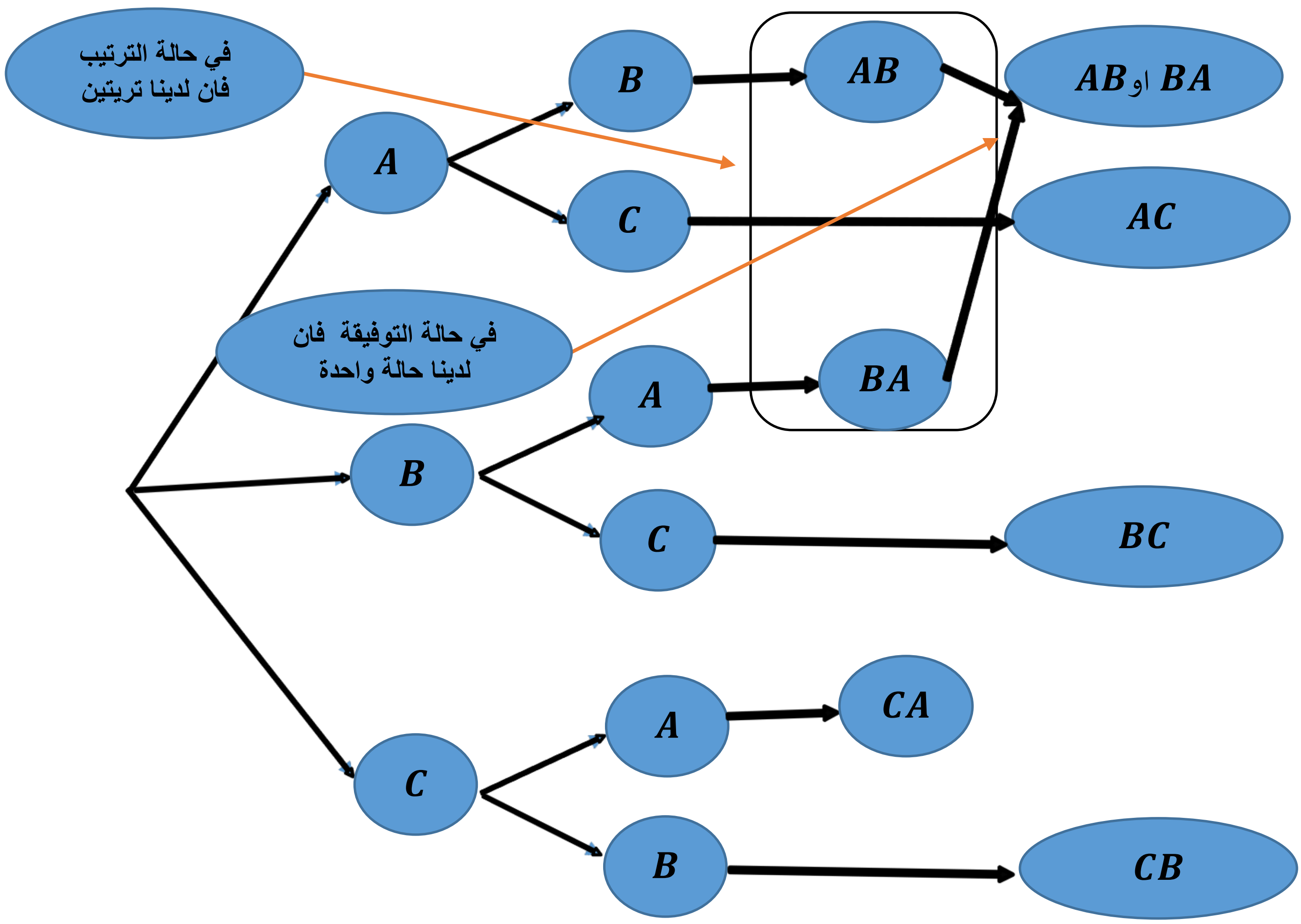
في هذه الحالة $\boldsymbol{P=2}$ و $\boldsymbol{n=4}$

$$C_n^P=\frac{n!}{p!\,(n-p)!} \text{ أي } C_4^2=\frac{4!}{2!\,(4-2)!}=\frac{4\times 3\times 2!}{2!\,2!}=\frac{12}{2}=6$$

الفرق بين التوفيقة والترتيبة هو أن الترتيبة يكون للترتيب فيها معنى أي يؤثر على المشاهدة مثلا: إذا كانت لدينا الأرقام التالية: $(1,2,3,4,5)$ وطلب منا تشكيلها اثنين اثنين دون تكرار فإننا نجد فرق بين ترتيب رقمين مثلا $(12|21)$ الأولى تُقرأ أثنى عشر والأخرى تُقرأ واحد وعشرون، أما إذا كانت لدينا مثلا أربع كرات ملونة واحدة حمراء والخرى بيضاء والأخرى زرقاء والأخيرة سوداء وطلب من تشكيلها اثنين اثنين ووضعنا ترتيب (زرقاء حمراء | حمراء زرقاء) من هنا نلاحظ أن التغير في الترتيب ليس له أي معنى وبتالي تعتبر تشكيلة واحدة.

ملاحظة:

الفرق بين التوفيقة والترتيبة هو أن الترتيبة يكون للترتيب فيها معنى أي يؤثر على المشاهدة مثلا: إذا كانت لدينا الأرقام التالية: $(1,2,3,4,5)$ وطلب منا تشكيلها اثنين اثنين دون تكرار فإننا نجد فرق بين ترتيب رقمين مثلا $(12|21)$ الأولى تُقرأ أثنى عشر والأخرى تُقرأ واحد وعشرون، أما إذا كانت لدينا مثلا أربع كرات ملونة واحدة حمراء والخرى بيضاء والأخرى زرقاء والأخيرة سوداء وطلب من تشكيلها اثنين اثنين ووضعنا ترتيب (زرقاء حمراء | حمراء زرقاء) من هنا نلاحظ أن التغير في الترتيب ليس له أي معنى وبتالي تعتبر تشكيلة واحدة.



توضيح الفرق في القانون بين الترتيبة والتوفيقة

توفيقة

$$C_n^P = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

ترتيبة

$$A_n^P = \frac{n!}{(n-p)!}$$

الفرق بين الترتيبة والتوفيقة في القانون هو أننا في التوفيقة نقسم على

$$p!\,(n-p)!$$

والهدف من إضافة $p!$ هو الغاء الترتيب لأنه كما شرحنا سابقا فان الترتيب ليس له معنى وبالتالي التشكيلات التي تغير فيها الترتيب تحسب واحدة فقط لذل لاد من الغائها بالقسمة على $p!$

خصائص التوفيقات:

الخاصية الأولى:

إذا كان الفرق بين العدد الكلي n والعدد المسحوب واحد $(n-1)$ فإن عدد التوفيقات يساوي العد الكلي n

$$C_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,(n-(n-1))!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!\,(n-n+1))!} = \frac{n}{(0+1))!} = n$$

الخاصية الثانية:

إذا كان العدد الكلي والعدد المسحوب متساوي فان عدد التوفيقات يكون مساوي للعدد واحد

$$C_n^n = \frac{n!}{(n)!\,(n-(n))!} = \frac{(n)!}{(n)!\,(0))!} = \frac{(n)!}{(n)!} = 1$$

الخاصية الثالثة:

إذا كان العدد المسحوب هو صفر من العدد الكلي n فان عدد التوفيقات يكون توفيقة واحدة 1

$$C_n^0 = \frac{n!}{(0)!\,(n-0)!} = \frac{(n)!}{(n)!} = \frac{(n)!}{(n)!} = 1$$

الخاصية الرابعة:

إذا كان العدد المسحوب هو 1 من العدد الكلي n فان عدد التوفيقات يكون مساوي للعدد الكلي n

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

في هذه الحالة فإن: $C_n^1 = A_n^1$

مثال في خواص التوفيقات:

$C_n^1 = n$ مـــــــــــثال

$C_5^1 = 5$
$C_{10}^1 = 10$
$C_{66}^1 = 66$

$C_n^0 = 1$ مـــــــــــثال

$C_9^0 = 1$
$C_{11}^0 = 1$
$C_{88}^0 = 1$

$C_n^{n-1} = n$ مـــــــــــثال

$C_6^5 = 6$
$C_{99}^{98} = 99$
$C_{46}^{45} = 46$

$C_n^n = 1$ مـــــــــــثال

$C_9^9 = 1$
$C_{111}^{111} = 1$
$C_{40}^{40} = 1$

مـــــــــثال:

اذا أخذنا مرشحين اثنين من بين ثلاثة مرشحين ولم نأخذ بعين الاعتبار الترتيب. فما هي عدد التوفيقات الممكنة واذكرها؟

$$P = 2 \rightarrow \text{المسحوب}$$

$$n = 3 \rightarrow \text{العدد الكلي}$$

$$C_n^P = C_3^2 = \frac{3 \times 2!}{2!\,(3-2)!} = 3$$

مثـــــــال:

اراد مدرب فريق كرة القدم تشكيل فريق من 11 لاعب، يتم اختيارهم من بين 20 لاعب. فما هو عدد الفرق التي يمكن تشكيلها؟

$$P = 11 \rightarrow \text{المسحوب}$$

$$n = 20 \rightarrow \text{العدد الكلي}$$

$$C_n^P = C_{20}^{11} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11!}{11!\,(20-11)!} = 167960$$

أن المدرب له خيارات عديدة لتشكيل الفريق وهي 167960 امكانية.

2. المعاينة (العينات المرتبة): هي عدد العينات المكونة من r عنصر التي يمكن اختيارها من مجتمع يحتوى على n عنصرويكون ذلك بطريقتين هما:

1 . 2 العينات مع الاحلال (الاعادة او الارجاع): أن عدد العينات التي يمكن تشكيلها عن طريق الاختيار (السحب) بالإحلال (الاعادة تساوي n^p. ان الفرد الأول يتوفر على n امكانية لاختياره وبالمثل بالنسبة للفرد الثاني، لأننا اعدنا الفرد الأول للمجتمع، وهكذا يتم اختيار الفرد تلو الاخر حتى نصل إلى العنصرع من العينة الذي له نفس امكانيات العناصر السابقة له. وبالتالي فان عدد العينات المشكلة هذه الطريقة تساوي:

$$n \times n \times n \times n \ldots \ldots . n = n^p$$

مثـــــــال:

لدينا أوراق الكوتشينة التي تحوي 52 ورقة، بكم طريقة يمكن اختيارأربعة أوراق الكوتشينة مع الإعادة،

$$52 \times 52 \times 52 \times 52 = 52^4 = 7311616$$

عينة مرتبة مختلفة حجمها 7311616 بالاحلال (الاعادة).

2 . 2 العينات بدون احلال (بدون اعادة او بدون ارجاع): أما عدد العينات التي يمكن تشكيلها عن طريق السحب بدون احلال (اعادة) هو A_n^P. أن الفرد الأول يتوفر على امكانية لسحبه، أما الفرد الثاني فيكون على $(n-1)$ لأننا لم نرجع الفرد الأول للمجتمع، وهكذا يتم سحب الفرد تلو الاخر حتى نصل الى العنصر p من العينة الذي له $(n-p+1)$ امكانية. وبالتالي فان عدد العينات المشكلة هذه الطريقة تساوي:

$$n \times (n-1) \times \ldots \ldots \times (n-r+1) = A_{n}^{P}$$

مـــــــثال:

لدينا أوراق الكوتشينة التي تحوي 52 ورقة، بكم طريقة يمكن اختيار أربعة أوراق الكوتشينة بدون ارجاع؟

= 52 x 51 x 50 = 132600 52 × 51 × 50 x 49!52! 52!49! 452 = (52 - 3)!= 49. =-

عينة مرتبة مختلفة حجمها 3 بدون ارجاع.

القسم الثاني: أساسيات الاحتمال

أولا: تعاريف ومفاهيم أساسية في نظرية الاحتمالات

1. التجربة

التجربة هي كل عملية تؤدي إلى ملاحظة أو قياس، وتنقسم إلى قسمين:

التجربة النظامية

التجربة النظامية هي كل تجربة نحدد نتائجها مسبقا على أساس القوانين العلمية المعروفة، وذلك انطلاقا من جملة من الشروط المرتبطة بالظاهرة والمتوفرة أثناء التجربة (المقدمات). حيث نجد أن هذا النوع من التجارب في مجال العلوم الدقيقة، وبصورة أساسية في مجال الفيزياء والكيمياء.

التجربة العشوائية

التجربة العشوائية هي كل تجربة تكون نتائجها غير معروفة مسبقا، واذا كررنا نفس التجربة وظمن نفس الشروط (نفس المقدمات) فاننا لا نحصل بالظرورة على نفس النتائج.

مثال:

لتكن التجربة العشوائية التالية: نرمي زهرة نرد متجانسة (ليست مزورة: المزورة هي الزهرة التي لا تكون نفس الحظوظ لكل رقم بالظهور) مرة واحدة، وبطريقة عشوائية:

س: ما هو احتمال ظهور الرقم 6؟

_ من خلال هذه التجربة نحدد ما يلي:

- أداة التجربة: زهرة النرد

- طريقة التجربة: رمي زهرة النرد مرة واحدة

- هذه التجربة هي تجربة عشوائية لأننا لا نعرف النتيجة مسبقا، وفي حالة تكرار هذه التجربة فإننا لن نحصل بالضرورة على نفس النتيجة، وبالتالي الإجابة على السؤال ستكون حساب النسبة المحتملة لظهور الرقم 6.

2- **مجموعة الأساس: هي** مجموعة النتائج الممكنة والمختلفة لتجربة ما، ونرمز لها بالرمز $\boldsymbol{E}$ وتعرض على شكل مجموعة رياضية $E = \{\dots\ \dots\ \dots\ \dots\}$، وعدد عناصرها$\boldsymbol{E}$ ، ونرمز لها بالرمز $|\boldsymbol{E}|$

مثال:

لدينا: $E = \{PF\}$ أي أن، $|E| = 2$

ملاحظة: نحدد مجموعة الأساس من خلال الأداة وطريقة التجربة العشوائية

تعاريف ومبادئ أولية:

كثيرا ما نستعمل هذه الكلمة التي تجري على لسان العديد من الناس فمثلا في الانتخابات نقول ان شخص معين محتمل ان ينجح، او عندما نشارك في مسابقة ويكون عدد المشاركين كبير نقول ان احتمال النجاح صغيروعندما يكون عدد المشاركين قليل نقول ان نسبة النجاح مرتفعة وان هناك حظ أوفر، واحيانا اذا كان عدد المناصب وعدد المشاركين متساوي فاننا نقول بان نسبة النجاح هي 100 % وهذا يجعل مصطلح الاحتمال ليس من المصطلحات الغريبة بل هي كثيرة الشيوع بين العامة وبين الاكاديميين،

تغير كثيرا تعريف الاحتمال من التعريف الكلاسيكي إلى الصورة المجردة للتعريف حسب تطور علم الاحتمالات كالتالي:

أ. التعريف الكلاسيكي للاحتمال Classical definition

نفترض أن A حدث في فراغ S ، وأن عددي عناصر A و S هما n و N

.ويتم حساب الاحتمال حسب تعريف باسكال للاحتمال:

عرف بليز باسكال (1623 : ***Blaise Pascal***) الاحتمال بالشكل التالي :

"احتمال حدث هو عدد الحالات الملائمة لوقوع الحدث مقسوما على عدد الحالات الممكنة، إذا اقترضنا أن كل الحالات لها نفس الاحتمال في الوقوع."

نعرف احتمال الحدث A كما يلي: $P(A)$ على أنه $\boldsymbol{P(A) = \frac{n}{N}}$

مثال: عند رمي زهرة نرد مرة واحدة فإن الحادث A يعني ظهوررقم فردي يعني أن الناتج 1 أو 3 أو 5

$$\boldsymbol{S = \{1.2.3.4.5.6.\}}$$

$$\boldsymbol{A = \{1.3.5.\}}$$

$$\boldsymbol{n = 3 \quad N = 6}$$

احتمال الحصول على رقم فردي

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}}$$

وهذا يعني نظريا أنه إذا كررنا التجربة عددا كبيرا جدا من المرات فإن حدوث A يشكل نصف المرات. بالطبع إذا رمينا الزهر 100 مرة فلن نحصل بالضبط على نصف هذا العدد من A , فنسبة حدوث A تتغير كلما اعدنا الرمي 100 مرة. الأمر الذي سيتم التطرق له في التعريف الثاني

مثال: في تجربة رمي زهرتي نرد أوجد الاحتمالات التالية:

A. مجموع رقمي الزهرتين يساوي 4
B. مجموع الناتج يساوي 10 على الاقل
C. ان يظهر الرقم 6 في زهرة النرد الثانية
D. مجموع الرقمين الظاهرين أكبر من 5
E. ناتج أحد الزهرين هو 6
F. مجموع الناتجين أقل من 6

الحـــــــــل

اول ما نقوم به هو تحديد عدد الحالات الكلية N ، بما انه لدينا زهرتي نرد كل زهرة تحمل ستة أرقام ونحن نقول

ظهور الرقم الاول الخاص بزهرة النرد الاولى **و** الرقم الثاني الخاص بزهرة النرد الثانية

قلنا سابقا أن حرف **الواو** رياضيا يقابه عملية الضرب

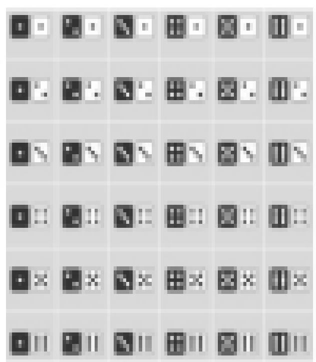
وبما ان عدد الحالات في زهرة النرد الاولى هو ستة نفسه في زهرة النرد الثانية

أي عدد الحالات الكلية هو $6 \times 6 = 36$

أي $N = 36$

ايضا يمكن تحديد الحالات الكلية كالتالي:

زهرة النرد الثانية	زهرة النرد الاولى					
	1	2	3	4	5	6
1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
3	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6
4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
5	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
6	6.1	6.1	6.3	6.4	6.5	6.6



من خلال الجدول السابق نلاحظ أن عدد الحالات الكلية هو $N = 36$

حل السؤال الاول: مجموع رقمي الزهرتين يساوي 4

أولا: فراغ العينة الذي يحدد الحالات الكلية S

$$S = \{(1.1)(1.2)(1.3)(1.4)(1.5)(1.6)(2.1)(2.2)(2.3)(2.4)(2.5)$$
$$(2.6)(3.1)(3.2)(3.3)(3.4)(3.5)(3.6)(4.1)(4.2)(4.3)(4.4)(4.5)(4.6)(5.1)$$
$$(5.2)(5.3)(5.4)(5.5)(5.6)(6.1)(6.2)(6.3)(6.4)(6.5)(6.6)\}$$

عدد الحالات الكلية كما قلنا سابقا هو 36

ثانيا: فراغ العينة الذي يحدد الحالات الممكنة A الذي يحقق شرط مجموع الرقمين الظاهرين يساوي 4

$$A = \{(1.3)(2.2)(3.1)\}$$

نلاحظ أن عدد الحالات التي يكون فيها مجموع الرقمين الظاهرين هو 4 يمثل ثلاث حالات فقط ومنه احتمال حدوث الحادث A هو

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

حل السؤال الثاني: مجموع الناتج يساوي 10 على الاقل

معنى ان يكون المجموع **10** على الاقل هو ان يكون مجموع الرقمين الظاهرين لزهرتي النرد إما **10** أو **11** أو **12**

هنا نستفسر لماذا توقفنا عند رقم 12
الجواب لان أكبر مجموع يمكن الحصول عليه من جمع الرقمين الظاهرين لزهرتي النرد هو ناتج عن مجموع اكبر رقمين و اكبر رقمين هم 6 + 6 = 12
أما أقل مجموع فهو ناتج عن مجموع اقل رقمين أي 1+1=2

$$B = \{(4.6)(6.4)(5.5)(5.6)(6.5)(6.6)\}$$

نلاحظ أن عدد الحالات التي يكون فيها يكون المجموع **10** على الاقل هو 6 حالات ومنه احتمال حدوث الحادث B هو

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

حل السؤال الثالث: ان يظهر الرقم 6 في زهرة النرد الثانية

فراغ العينة C الذي يحقق شرط ظهور الرقم 6 في زهرة النرد الثانية هو:

$$C = \{(1.6)(2.6)(3.6)(4.6)(5.6)(6.6)\}$$

نلاحظ أن عدد الحالات التي يظهر فيها الرقم 6 في زهرة النرد الثانية هو 6 حالات ومنه احتمال حدوث الحادث C هو

$$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

حل السؤال الرابع: الحادث D مجموع الرقمين الظاهرين أكبر من 5

معنى ان يكون المجموع أكبر من 5 هو أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين لزهرتي النرد إما 6 أو 7 أو 8 أو 9 أو 10 أو 11 أو 12

نحن نعلم أن اقل مجموع يمكن الحصو عليه هو 2 و أكبر مجموع يمكن الحصول عليه هو 12

نلخص ذلك كما يلي:

مجموع الرقمين الظاهرين 5 و أقل				مجموع الرقمين الظاهرين أكبر من 5						
2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
(1.1)	(1.2)	(1.3)	(1.4)	(1.5)	(1.6)	(2.6)	(3.6)	(4.6)	(5.6)	(6.6)
	(2.1)	(2.2)	(2.3)	(2.4)	(2.5)	(3.5)	(4.5)	(5.5)	(6.5)	
		(3.1)	(4.1)	(3.3)	(3.4)	(4.4)	(5.4)	(6.4)		
				(4.2)	(4.3)	(5.3)	(6.3)			
				(5.1)	(5.2)	(6.2)				
					(6.1)					

نلاحظ أن عدد الحالات التي يكون فيها المجموع أكبر من 5 هو 27 حالة ومنه احتمال حدوث الحادث D هو:

$$P(D) = \frac{27}{36}$$

حل السؤال الخامس: الحادث E ناتج أحد الزهرين هو 6

$$E = \{(1.6)(2.6)(3.6)(4.6)(5.6)(6.6)(6.1)(6.2)(6.3)(6.4)(6.5)\}$$

نلاحظ أن عدد الحالات التي يظهر فيها الرقم 6 هو 11 حالات ومنه احتمال حدوث الحادث E هو

$$P(E) = \frac{11}{36}$$

حل السؤال السادس: الحادث F مجموع الناتجين أقل من 6

معنى ان يكون المجموع أقل من 6 هو أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين لزهرتي النرد إما 5 أو 4 أو 3 أو 2

نحن نعلم أن اقل مجموع يمكن الحصوعليه هو 2 و أكبر مجموع يمكن الحصول عليه هو 12

نلخص ذلك كما يلي:

مجموع الرقمين الظاهرين أقل من 6

مجموع الرقمين الظاهرين أكبر من 5

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(1.1)	(1.2) (2.1)	(1.3) (2.2) (3.1)	(1.4) (2.3) (4.1)	(1.5) (2.4) (3.3) (4.2) (5.1)	(1.6) (2.5) (3.4) (4.3) (5.2) (6.1)	(2.6) (3.5) (4.4) (5.3) (6.2)	(3.6) (4.5) (5.4) (6.3)	(4.6) (5.5) (6.4)	(5.6) (6.5)	(6.6)

نلاحظ أن عدد الحالات التي يكون فيها المجموع أقل من 6 هو 9 حالات ومنه احتمال حدوث الحادث F هو:

$$P(F) = \frac{9}{36}$$

ب. التعريف التكراري للاحتمال Frequencial definition

نفرض أننا بدأنا برمي الزهر 100 مرة وحسبنا نسبة A، ثم أكملنا عدد الرميات إلى 200 وحسبنا نسبة A ، ثم أكملنا عدد الرميات إلى 500 وحسبنا نسبة A، وهكذا، فاننا سنجد أن النسبة تتغير كل مرة إلا أنه مع استمرار الزيادة في عدد التجارب فإن النسبة ستقترب من النسبة النظرية.

ج. التعريف الاعتقادي للاحتمال Degree of belief

مع تقدم الزمن وجد أن التعريفين السابقين لا يحققان كل التجارب، فظهر تعريف الاحتمال بانه مستوى الاعتقاد، فهناك تجارب لا يعرف فيها عدد عناصر الفراغ أو الحدث. مثلا إذا أردنا ان نحدد احتمال الفوز لكل فريق في مقابلة كرة القدم، في هذه الحالة ليس لدينا فراغ بالمفهوم السابق حتى

نحسب عدد العناصر وبالتالي عدم امكانية عد عناصر الحدث، كما أنه ليس من الممكن تكرار التجربة (لا يمكن تكرار المباريات في نفس الظروف عدة مرات) حتى نستطيع استخدام التعريف الاجرائي، وبالتالي في هذه الحالة يمكن لأي شخص أن يفكر في إحتمال للحدث حسب رؤيته الشخصية والمعطيات التي يتوفر عليها، وبالتالي هذا النوع من الاحتمال سمي بالاحتمال الاعتقادي.

ج. التعريف التجريدي للاحتمال **Axiomatic definition**

في هذا التعريف لا نشير إلى موضوع محدد ولكن نتحدث عن قانون يمثل الاحتمال في تجربة ما: أي دالة حقيقية تحقق الشروط الآتية تسمى دالة احتمال؛ بمعنى أنها وصف حدث ما في تجربة ما:

$$\begin{cases} \mathrm{I} & f_{(x)} \geq 0 \qquad\qquad x \in S \\ \mathrm{II} & f_{(x)} = 1 \\ \mathrm{III} & f_{\left(\cup_{C}^{A_J}\right)} = \sum_{i} f_{(A_j)} \end{cases}$$

سيتم التتفصيل في هذا النوع من الاحتمالات في الاقسام القادمة

خصائص الإحتمال

عادة ما نعبر عن هذه الخصائص بالطريقة التالية:

- الاحتمال هو عدد موجب تماما أو معدوم (لا يكون سالبا).
- مجموع احتمالات أحداث تجربة ما يساوي الواحد.

ويمكن إضافة خاصية ثالثة تستنتج بديهيا من الخاصيتين السالفتين وهي أن الاحتمال يكون محصورا بين 0 و1. أي أنه لا يمكن أن يكون سالبا ولا أن يكون أكبر من الواحد.

الأركان الخمسة في حساب الاحتمالات

هناك خمس قواعد أساسية في حساب الاحتمال نذكرها الآن باقتضاب لإبراز أهميتها ونعود لشرحها فما بعد وسنحتاج إلى استخدام هذه القواعد في جميع فصول المقياس.

1. احتمال وقوع حدث يساوي 1 مطروحا منه احتمال الحدث المعاكس. مجموع احتمال الحدث واحتمال الحدث المعاكس يساوي 1.

2. احتمال وقوع حدثان "أ" و "ب" يساوي احتمال وقوع الأول مضروبا في احتمال وقوع الثاني لما يكون الأول قد وقع فعلا.

3. احتمال وقوع حدثان مستقلان يساوي جداء الاحتمالين أي احتمال الحدث الأول مضروبا في احتمال الحدث الثاني.

4. احتمال وقوع الحدث وعكسه يساوي الصفر، ونقول أن الحدثان متنافيان.

5 احتمال وقوع حدث "" أو "ب" يساوي جمع احتمالي الحدثين مطروحا منه احتمال تحققهما معا.

هنا فرق بين الحدث والاحتمال، فالحدث العشوائي هو واقعة أو نتيجة ما، أما الاحتمال فهو عدد بين الصفر والواحد يعبر عن حظوظ وقوع الحدث (ليس شرطا أن يكون زمن وقوع الحدث هو المستقبل، فقد يكون الماضي أو الحاضر). سئل الرئيس العراقي السابق - قبل حرب الخليج الأولى- ما هو احتمال انهزامكم في هذه الحرب ؟ فأجاب: "واحد إلى مليون". عندما نرغب في التعبير بشكل دقيق على مدى إمكانية وقوع حدث معين فإننا عادة نستعمل عبارات مثل: 100% للحدث المؤكد أو 50% للحدث المحتمل و1‰ مثلا للحدث المستبعد، إذن نحن نستخدم الكسور في سلم تصاعدي من 0 إلى1، بحيث يرمز 0 للاستحالة و1 للتأكد.

ويجب التمييز بين الاحتمال والإمكانية (الإمكانية هي حدث). فالاحتمال في مفهوم العلم هو عدد يقيس حظوظ وقوع شيء ما نسميه نتيجة أو حدث أو إمكانية. أما الإمكانية فهي حدث أو نتيجة ما من بين أحداث أو نتائج أخرى. يختلف عن هذا المفهوم العلمي تعريف الناس للاحتمال. فكثيرا ما تطلق كلمة الاحتمال و يقصد بها إمكانية، فيقال مثلا "إن هذا احتمال ممكن" و الصحيح إن هذه إمكانية واردة" أو يقال "إذا رمينا حجر نرد هناك 6 إحتمالات" و الصحيح " هناك 6 إمكانيات أو 6 نتائج محتملة"،

3- الحدث EVENT:

عند اجراء تجربة عشوائية يمكن أن يكون اهتمامنا موجها الى نتيجة ما محددة من النتائج الممكنة للتجربة، أو إلى عدة نتائج محددة للتجربة؛ أي نهتم بالحصول على عناصر محددة من فضاء التجربة،

فعلى سبيل المثال اذا كانت لدينا حادثة A تتمثل في ظهور الصورة خلال تجربة رمي قطعة النقود مرة واحدة فان A يمكن كتابتها كما يلي $A = \{H\}$ ، وإذا كانت الحادثة A تتمثل في ظهور الصورة مرة واحدة، في تجربة رمي قطعتي النقود فإن A تعرف كما يلي: $A = \{HT.TH\}$

فمثلا إذا كانت الحادثة A تمثل الاعداد الفردية في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة فإن:

$$A = \{1, 3, 5\}$$

وإذا كانت الحادثة A هي: $A = \{(X, Y): X + Y < 4\}$ في تجربت رمي زهرتي نرد فإن:

$$A = \{(1, 1)(1, 2)(2, 1)\}$$

أنواع الحوادث:

تتمثل أنواع الحوادث كما يلي:

أ- **الحدث البسيط:** نقول عن حدث أنه بسيط إذا كان غير قابل للتجزئة، كظهور الرقم 2 في رمي زهرة النرد مرة واحدة $A = \{2\}$

ب- **الحدث المركب:** نقول عن حدث أنه مركبا إذا كان قابلا للتجزئة، أي إمكانية تفكيكه إلى حوادث أبسط، مثل ظهوررقم فردي في رمي زهرة النرد مرة واحدة، في هذه الحالة نكون بصدد حدث مركب من ثلاث حوادث بسيطة $A = \{1, 3, 5\}$ ، فالحصول على 1 أو 3 أو 5 يعني حتما تحقيق الحدث المركب.

وتعرف ايضا على انها مجموعة مكونة من أكثر من نقطة من فراغ العينة. فاتحاد حوادث بسيطة هو عبارة عن حوادث مركبة، مثلا عند رمي قطعة النقود ثلاث مرات فنحن هنا امام حادث مركب من حوادث بسيطة.

ت- **الحدث الأكيد:** نقول عن حدث أنه أكيدا إذا كان يحوي جميع الأحداث البسيطة المرتبطة بالتجربة، مثل الحصول على رقم أقل من 9 في تجربة رمي قطعة نرد مرة واحدة، E =A .

ث- **الحدث المستحيل:** نقول عن حدث أنه مستحيلا إذا كان غير قابل للتحقق، أي لا يتضمن ولا حدث بسيط، مثل الحصول على رقم 10 في تجربة رمي قطعة نرد مرة واحدة، A = Ø.

ج- **الحوادث المتنافية «*exclusive events*»:** الحوادث المتنافية هي الحوادث التي لا يمكن وقوعها في آن واحد، لان وقوع أحدها يمنع من وقوع الحوادث الأخرى، الأمر الذي يعني عدم وجود عناصر مشتركة للعناصر المكونة لها،

مثال: لو تناولنا سلة فيها تفاح أحمر وباذنجان مثلا، وسالنا عن احتمال الحصول على حبة خضار لونها أحمر لدى سحبن الحبة من الحبات الموجودة في السلة، لاتانا الجواب بان هذا الحدث حدث مستحيل لا يتحقق داخل السلة المفترضة.إلا أن ما يهمنا في الو اقع ليس هذا بل كونه مؤلفا من حدثين متنافيين لا اشتراك بينهما، الأول *(A)* حبة الخضار، والثاني *(B)* حبة لونها أحمر، ومن الواضح انه لا اشتراك داخل السلة بين هذين الحدثين،

و أيضا عند رمي قطعة نقود متزنة فإن ظهور الصورة ينفي ظهور الكتابة وبالتالي فان ظهور الكتابة متعلق بعدم ظهور الصورة أي ان الحدثين متنافين.

ح- **الحوادث غير المتنافية «compatible events»** : الحوادث غير المتنافية هي الحوادث التي يكون وقوع أحدها غير مانع من وقوع الحوادث الأخرى، الأمر الذي يعني وجود عناصر مشتركة للعناصر المكونة لها، ويكون وقوعهما معا غير مستحيل.

مثال: ولو بقينا في المثال المتقدم للسلة التي تحتوي على التفاح الأحمر وعلى الباذنجان، وسالنا عن احتمال الحصول على حبة فاكهة لونها أحمر لدى سحبنا لحبة من الحبات الموجودة في السلة، لكان الجواب بانه حدث ممكن التحقق لانه مؤلف من حدثين بينهما اشتراك داخل السلة المفترضة، الأول *(A)* حبة الفاكهة، والثاني *(B)* حبة لونها أحمر، حيث يجتمعان داخل السلة المذكورة في حبة التفاح الحمراء.

خ- **الحدث المتمم:** الحدثان المتتامان هما اللذان يقع أحدهما إذا وفقط لم يقع الآخر؛ أي يكون يكون الحدثان A و B متتامان إذا وفقط إذا كان:

$$A \cup B = S. \qquad A \cap B = \emptyset$$

أي:

$$B = S - A = \acute{A}$$

مثال: في تجربة رمي زهرة نرد نهتم بطبيعة الحال بالرقم الظاهر على الوجه العلوي وبالتالي فضاء العينة كالتالي:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

فإذا كانت الأحداث C, B, A تتمثل فيما يلي:

$$A = \{1, 3, 5\}$$
$$B = \{2, 4, 6\}$$
$$C = \{2, 4\}$$

نلاحظ أن الحدثين B, A متنافيان لأن $A \cap B = \emptyset$

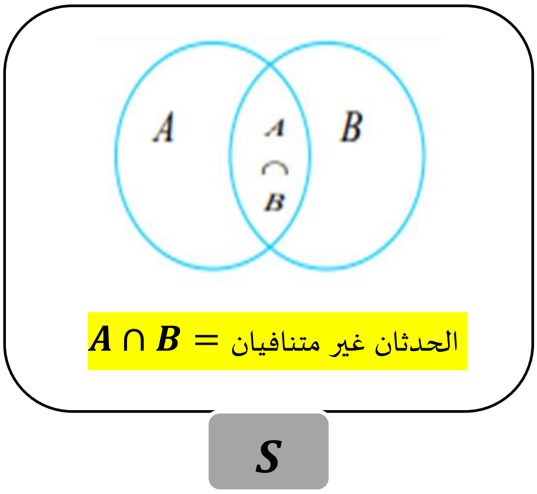
كما نلاحظ أن الحدثين B, A متتامان لان $A \cup B = S$ أي أن اتحاد كل من B, A ينتج عنهم كل فراغ العينة $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

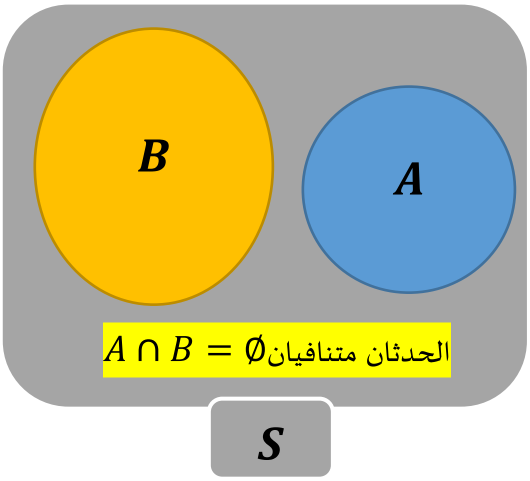
أما بالنسبة للحدثين C, A فنلاحظ أنهما متنافين لان $A \cap C = \emptyset$

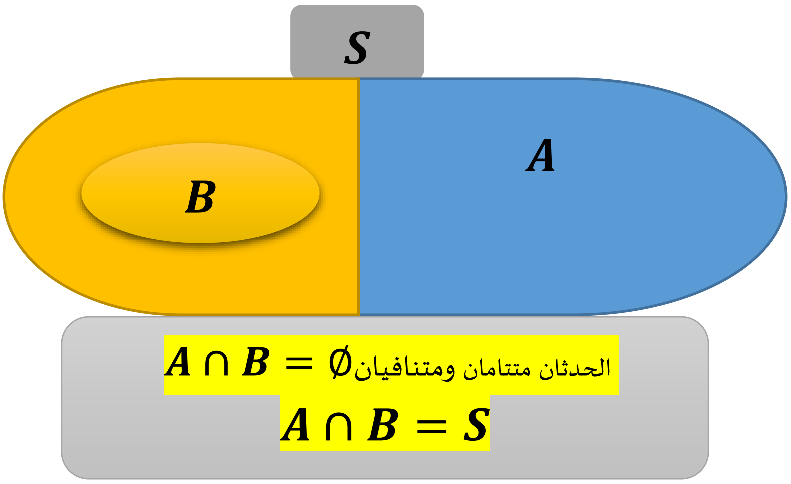
إلا أن الحدثين C, A ليسا متتامان لان $A \cup C \neq S$

ملاحظة مهمة

ليس كل حدثان متنافيان متتامان







د- **الحوادث غير المستقلة**: نقول أن A وB حدثين غير مستقلين إذا كان تحقق أحدهما (مثلاB) مرتبط بأي شكل من الأشكال (مشروط) بتحقق الأخر(مثلاA)، مثلا السحب من مجتمع محدود وصغير مع عدم الإعادة، وبالتالي فالسحبة الموالية تتأثر بالسحبة السابقة.

ط- **الحوادث المستقلة**: نقول أن A وB حدثان مستقلان إذا كان تحقق أحدهما غير مرتبط بأي شكل من الأشكال (غير مشروط) بتحقق الأخر، مثلا السحب من مجتمع محدود وصغير مع الإعادة، وبالتالي فالسحبة الموالية لا تتأثر بالسحبة السابقة.

وبصفة رياضية فإنه إذا الحادثين E_2 وE_1 مستقلين إذا كان:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$$

نظرية:

إذا كان لديك $E_1 \,; E_2$ حادثين مستقلين في Ω وكان:

أ) $E_1 \,; \overline{E}_2$ مستقلان, ب) $\overline{E}_1 \,; E_2$ مستقلان، $\overline{E}_1 ; \overline{E_2}$ مستقلان.

مثال:

إذا كان لديك $E_1 \,; E_2$ حادثين مستقلين:

$$P(E_1) = 0.3 \qquad P(E_2) = 0.4$$

أحسب ما يلي:

$a)\quad P(E_1 \cap E_2)$

$b)\quad P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2)$

$C)\quad P(\overline{E}_1 \cap E_2)$

$C)\quad P(\overline{E}_1 \cup E_2)$

الحل

$a)\quad P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) = (0.3)(0.4) = 0.12$

$b)\quad P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2) = P(\overline{E}_1)P(\overline{E}_2) = (0.7)(0.6) = 0.42$

$C)\quad P(\overline{E}_1 \cap E_2) = P(\overline{E}_1)P(E_2) = (0.7)(0.4) = 0.28$

$$C)\quad P(\overline{E}_1 \cup E_2) = P(\overline{E}_1) + P(E_2) - P(\overline{E}_1 \cap E_2)$$
$$= (0.7) + (0.4) - 0.28 = 0.82$$

مثال

شركة موبايل اكسبلوريشن هذه الشركبة عبارة عن عن فرع تابع لشركة موبايل ويظطلع هذا الفرع بمسؤولية اكتشاف البترول والغاز الطبيعي في أنحاء العالم تقوم الشركة باجراء مسوحات جيولوجية خلال مرحلة الاكتشاف والتي تقدم معلومات عن باطن الأرض ثم اعتمادا على الخبرة السابقة تعرف الشركة ما إذا كانت قراءات مسوحاتها تنم عن وجود النفط أو الغاز ، ومع ذلك فإن القراءات ليست مؤشرات مثالية, لنفترض أن الشركة تقوم بعمل استكشافي في شرق استراليا، يمكن التعبير عن النتائج الممكن للمسوحات كما يلي:

e_1 مرغوب، e_2 مرغوب،

إذا قررت الشركة التنقيبفإن النتائج ستكون كما يلي:

e_3وجود النفط والغاز، e_4 بئرجاف،

يمكننا هنا القول أن أحداث المسوحات ليست متنافية مع حدث التنقيب لان المسح هنا قراراته غير مثالية فقد يكون غير مرفوب وعند الحفر نجد النفط والغاز،

القوانين الاساسية في الاحتمال

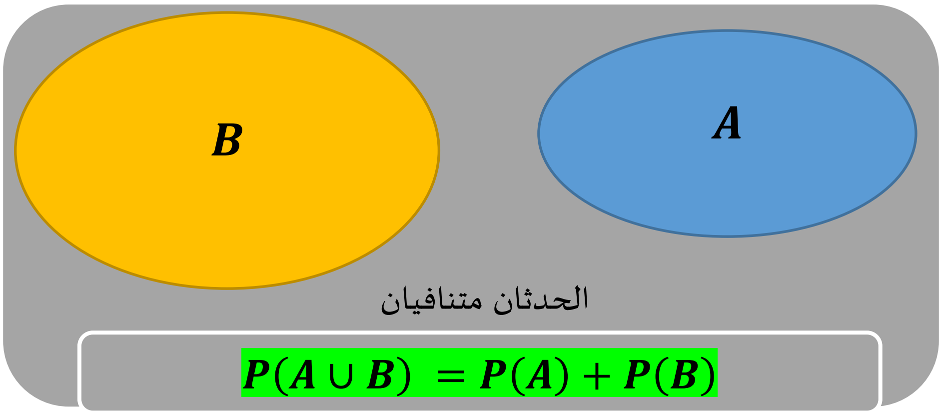
جمع الاحتمالات:

أولا: حالة الاحداث المتنافية: إذا كان A وB حدثين متنافيين؛ أي أن حدوث حدث ينفي أو يمنع حدوث الجدث الآخر فإن إحتمال حدوث أحدهما A أوB يساوي حاصل جمع احتمالهما أي أن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cap B) = \emptyset$$

وهذا القانون يسمى قانون الجمع



ويمكن تعميم هذا القانون كما يلي في حالة الأحداث المتنافية

لدينا $A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots , A_n$ حوادث متنافية في فضاء العينة S

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \ldots , A_n) \ = P(A) + P(A_2) + P(A_3) \ldots \ldots + P(A_n)$$

مثال:

صندوق يحتوي على12 كرة منها 7 كريات سوداء، و3 بيضاء، سحبت من الصندوق **كرة واحدة عشوائيا**

أ) أحسب إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة من اللون الأسود أو من اللون الأبيض,

مثال:

قبل البدء في الحل لابد من معرفة هل الحادثين متنافين أم لا

نفرض أن حادث سحب كرة من اللون الأسود هي A

نفرض أن حادث سحب كرة من اللون الأبيض هي B

حسب تعريف الاحداث المتنافية نلاحظ أن سحب الكرة البيضاء لا يتاثر بسحب الكرة السوداء وأنهما ينفيان بعضهما أي اذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء فهذا سينفي سحب الكرة السوداء والعكس

لاحظ أنه تم تلوين عبارة كرة واحدة عشوائيا وذلك لأهميتها ولان اول ما يجب الانتباه له هنا هو عدد الكرات المسحوبة ثم نعرف ما معنى كلمة عشوائيا والتي نقصد بها أن كل عمليات السحب لها نفس الحظ

وبما أن الاحداث متنافية فان احتمال سحب كرة بيضاء أو كرة سوداء هو كالتالي:

$$P(A \cup B) \ = P(A) + P(B)$$

وبما أننا في سحب للكريات ووفي سحب عشوائي فإننا في هذه الحالة أمام توفيقة وقد تم التطرق لها سابقا

$$\text{الاحتمال} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}}$$

- إحتمال سحب كرة من اللون الأسود هي A مع العلم أن العدد الاجمالي للكرات 12 وعدد الكرات السوداء هو 7

عدد الحالات الملائمة C_7^1

عدد الحالات الكلية C_{12}^1

$$P(A) = \frac{C_7^1}{C_{12}^1} = \frac{7}{12}$$

- إحتمال سحب كرة من اللون الأبيض هي B مع العلم أن العدد الاجمالي للكرات 12 وعدد الكرات البيضاء هو 3

عدد الحالات الملائمة C_3^1

عدد الحالات الكلية C_{12}^1

$$P(B) = \frac{C_3^1}{C_{12}^1} = \frac{3}{12}$$

ومنه فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{7}{12} + \frac{3}{12} = \frac{10}{12}$$

ثانيا: حالة الاحداث غير المتنافية: إذا كان A وB حدثين غير متنافيين؛ أي أن حدوث حدث لا ينفي أو يمنع حدوث الحدث الآخر أي يمكن وقوع الحدثين معا مثلا لدينا الحدث يمثل الناجحين في الرياضيات و الحادث B يمثل نجاح الطالب في مادة الاحصاء، في هذه الحالة هل يمكن أن يكن نجاح الطالب في مادة الرياضيات مانعا للنجاح في مادة الاحصاء، بالطبع لا، هنا يمكن أن نجد طالبا ناجحا في المادتين ولهذا فالاحداث هنا ليست متنافية ويمكن أن تقع مع بعضها البعض، وحتى نعرف كيفية جمع الاحتمالات في الاحداث غير المتنافية سندرج المثال التالي:

مثال: في قسم للطلبة لدينا 25 وعشرون طالب، تم امتحانهم في مادة الرياضيات و الاحصاء

نسمي حدث نجاح الطالب في الرياضيات بالحادث A

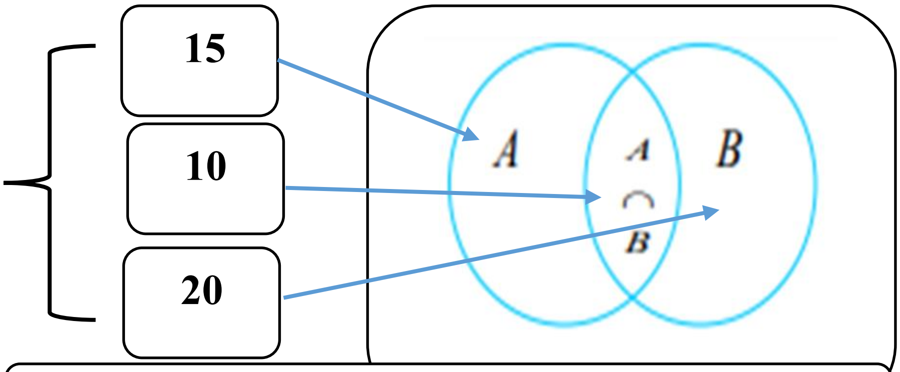
نسمي حدث نجاح الطالب في الاحصاء بالحادث B

نسمي حدث نجاح الطالب في الرياضيات و الاحصاء بالحادث A وB أي: $A \cap B$

إذا نجح 15 طالب في الرياضيات و20 طالب في الاحصاء وكان عدد الناجحين في المادتين هو10

الحل:

نعبرعن المعطيات كما يلي:



نلاحظ أن المجموع 35 مع العلم ان عدد الطلبة في القسم هو 25

$$(A \cup B) = (A) + (B) = 15 + 20 > 25$$

تساؤل

لماذ مجموع الحدثين AوB هنا اكبر من عدد الطلبة الموجودين في القسم

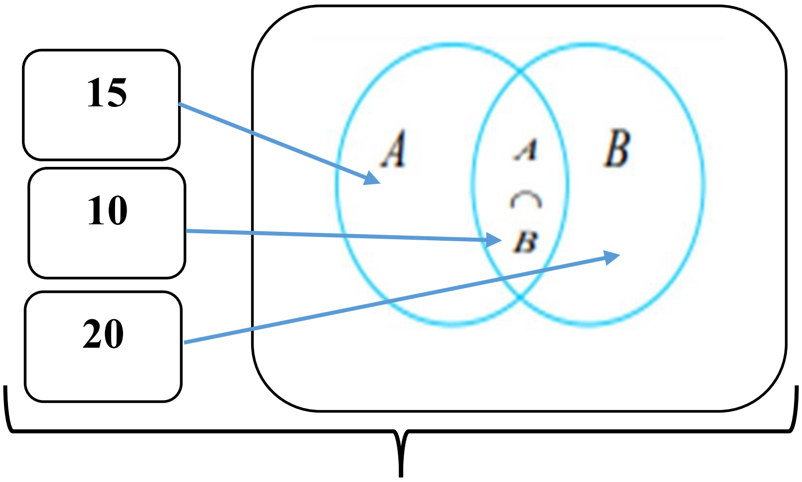
الجواب

نلاحظ أت الطالب الناجح في مادتين يتم حسابه مرتين بمعنى أن الطالب إذا نجح في الرياضيات والاحصاء(AوB) أي $A \cap B$) نقوم بحسابه مع الحادث A ونحسبه أيضا مع الحادث B والأصل هو حسابه مرة واحدة وبالتالي لابد من طرح المرة الزائدة

أي أنه لابد من طرح الطالب الذي يحسب مرتين والذي يمثل التقاطع $A \cap B$ ومنه يصبح قانون جمع الاحداث غير المتنافية كالتالي:

$$(A \cup B) = (A) + (B) - A \cap B$$

ملاحظة: الرسم يساعد على البرهان لكنه لا يعطي توضيح لكل الحالات وهذا سنلاحظه اذا كان لدينا أكثر من حدثين



$$(A \cup B) = (A) + (B) - A \cap B = 15 + 20 - 10 = 25$$

قاعدة

إذا كان لدينا حادثين A وB غير متنافيين فإن اتحادهما أي مجموعهما أو احتما حدوث الحادث A أو الحادث B يتم كما يلي:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال:

تم استجواب أحد المهندسين للحصول على عمل من قبل شركتين A و B , احتمال قبوله في الشركة A هو 0.8 واحتمال أن يتم قبوله في الشركة B هو 0.6 وأن احتمال قبوله في أحد الشركتين على الأقل هو 0.9 ،

ما هو احتمال أن يتم قبوله في الشركتين معا؟

قبل البدأ في الحل لابد من فهم التمرين لأنه إذا كان فهم السؤال نصف الإجابة في المواد الاخرى الا انه في الاحتمالات بشكل خاص فان فهم السؤال هو في حد ذاته الاجابة

الحل:

أولا: هل الاحداث هنا متنافية أو غير متنافية؟

الحدثين هنا A وB هما غير متنافين لأنه يمكن وقوعهما في نفس الوقت؛ أي ان المهندس يمكن له ان يتم قبوله في الشركتين معا ولا يتاثر قبوله في شكة ما بعلاقته بالشركة الاخرى.

ثانيا: ماذا نقصد بقبوله في أحد الشركتين على الأقل؟

يقصد هنا بقوله أحد الشركتين على الأقل هو أن يقبل المهندس إما في الشركة A أو في الشركة B بالمعنى الاحصائي A أو B أي $A \cup B$

ثالثا: ماذا نقصد بقبوله في الشركتين معا؟

نقصد بقبوله في الشركتين معا؛ أي يتم قبول المعندس في نفس الوقت في الشركة A وفي الشركة B بالمعنى الاحصائي A وB أي $B \cap A$

إذا الحدثين غير متنافين والمطلوب هو $P(A \cap B)$

لدينا $P(A \cup B) = 0.9 \qquad P(B) = 0.6 \qquad P(A) = 0.8$

حسب القانون لدينا $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$
$$P(A \cap B) = 0.8 + 0.6 - 0.9$$
$$P(A \cap B) = 0.5$$

يمكن للطالب أن يطرح سؤالا مهما جدا وهو إذا كان لدينا أكثر من حادثين فكيف ستكون القاعدة هنا؟ وهذا ما سنبينه بيانيا مع الشرح في حالة ثلاثة أحداث وبعدها نعطي القانون الرياضي

في قسم للطلبة لدينا 25 وعشرون طالب، تم امتحانهم في مادة الرياضيات والإحصاء والمحاسبة

نسمي حدث نجاح الطالب في الرياضيات بالحادث A

نسمي حدث نجاح الطالب في الاحصاء بالحادث B

نسمي حدث نجاح الطالب في الاحتمالات بالحادث C

نسمي حدث نجاح الطالب في الرياضيات و الاحصاء بالحادث A و B أي: $A \cap B$

نسمي حدث نجاح الطالب في الرياضيات و المحاسبة بالحادث A و C أي: $A \cap C$

نسمي حدث نجاح الطالب في المحاسبة و الاحصاء بالحادث C و B أي: $C \cap B$

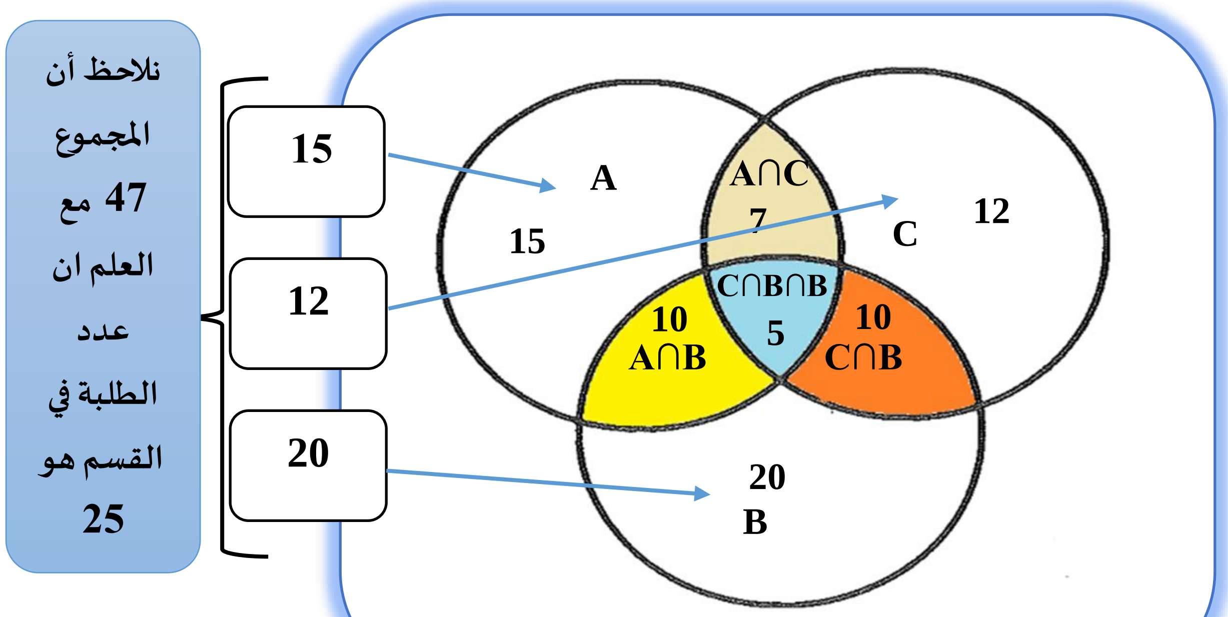
نسمي حدث نجاح الطالب في الرياضيات و الاحصاء والمحاسبة بالحادث A و B و C أي: $A \cap B \cap C$

إذا نجح 15 طالب في الرياضيات و20 طالب في الاحصاء و12 طالب في المحاسبة، وكان عدد الناجحين في الرياضيات و الاحصاء 10 وعدد الناجحين في الرياضيات و المحاسبة 7 وعدد الناجحين في المحاسبة و الاحصاء 10 أما عدد الناجحين في كل المواد فهو 5 طلبة

ما هو احتمال أن نختار طالب ويكون ناجح في مادة،

الحل:

أولا: قبل البداية في حل التمرين يستحسن ان يتم تخيله او رسمه حيث سنقوم باعداد الرسم التالي الذي يبين لنا معطيات التمرين بالتفصيل:



$$(A \cup B \cup C) = (A) + (B) + (C) = 15 + 20 + 12 > 25$$

تساؤل

لماذ مجموع الأحداث BوAوCهنا اكبر من عدد الطلبة الموجودين في القسم

الجواب

نلاحظ أن الطالب الناجح في مادتين حسابه مرتين بمعنى أن الطالب إذا نجح في الرياضيات والاحصاء ($A \cap B$ و $A \cap C$ و $C \cap B$)، كما أن هناك من نجح في ثلاثة مواد ($A \cap B \cap C$) نقوم بحسابه مع الحادث A ونحسبه مع الحادث B ونحسبه أيضا مع الحادث C والأصل هو حسابه مرة واحدة وبالتالي لابد من طرح المرة الزائدة

أي أنه لابد من طرح الطالب الذي يحسب مرتين والذي يمثل التقاطع والاحصاء ($A\cap B$ و $A\cap C$ و $C\cap B$)ومنه يصبح قانون جمع الاحداث غير المتنافية كالتالي:

$$(A\cup B\cup C) = (A)+(B)+(C)-A\cap B-A\cap C-C\cap B$$

$$=15+20+12-10-7-10=20<25$$

نلاحظ أنه بعد طرح التقاطعات التي تسببت في حساب الطالب أكثر من مرة حصلنا على مجموع أقل من العدد الكلي
فأين الخلل؟

نلاحظ أن الطالب الذي نجح في ثلاث مواد يشترك في كل التقاطعات وبالتالي فقد تم طرحه ثلاث مرات أي انه تم حذفه تماما لذا لابد من حسابه وهو يمثل

$$(A\cap B\cap C)$$

ومنه يكون القانون كالتالي:

$$(A\cup B\cup C) = (A)+(B)+(C)-A\cap B-A\cap C-C\cap B+(A\cap B\cap C)$$
$$=15+20+12-10-7-10+5=25$$

ومنه إذا كانت لدينا ثلاث أحداث غير متنافية يكون مجموع احتمالهم كالتالي:

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(C\cap B)+P(A\cap B\cap C)$$

تساؤل

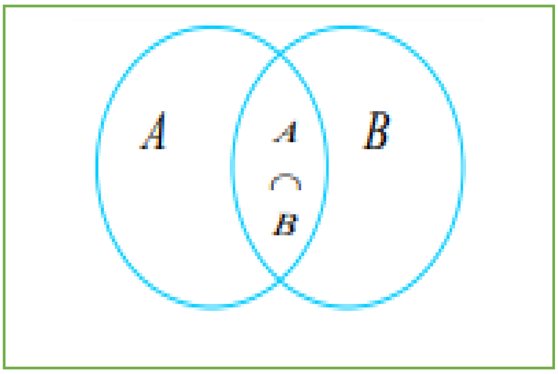
هل هناك قانون عام في حالة وجود عدد من الأحداث غير المتنافية

الجواب

في حالة وجود عدد من الأحداث غير المتنافية نستخدم القانون التالي:

$$P(A_1\cup A_2 \dots\dots\dots \cup A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\cdots \dots .+P(A_n)-P(A_1\cap A_2)- \dots .$$
$$\dots -P(A_{n-1}\cap A_n)+P(A_1\cap A_2\cap A_3)+\cdots \dots .+P(A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n)\dots .$$
$$\dots . \dots . \dots . \dots . \dots . \dots . \dots . \dots . \dots . \dots . \dots (-1)^{n-1}P(A_1\cap A_2\cap A_3 \dots\dots A_n)$$

مثال:



إذا كان لدينا الشكل التالي:

حدد، $P(A-B)$ ، $P(A\cap B)$

الحل:

$$P(A-B) \; = P(A)-P(A\cap B)$$
$$P(A\cap B) \; = P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

مثال:

أطلق صيادان نحو هدف معين فإذا كان إحتمال إصابة الأول للهدف هو **0.8** ، واحتمال إصابة الثاني للهدف هو **0.6**.

أحسب إحتمال:

A) إصابة الهدفين معا، B) إصابة الهدف

قبل البدء دائما في حل أي تمرين نحدد هل الاحداث مستقلة ام لا متنافية أم لا

الحل:

E_1 : حادث اصابة الأول الهدف $\longleftarrow$ $P(E_1) = 0.8$

E_2 : حادث اصابة الثاني الهدف $\longleftarrow$ $P(E_2) = 0.6$

أولا: الحادثين هنا مستقلين لماذا؟ لأن اصابة أو عدم اصابة الصياد الأول للهدف مستقل ولا يؤثر على الصياد الثاني.

ثانيا: الحادثين هنا غير متنافيين لماذا؟ لأنه يمكن اصابة الهدف للصيادين معا أي ان اصابة الهدف من طرف أحد الصيادين لا ينفي إصابة الهدف من طرف الصياد الأخر

A) إصابة الهدفين معا، معناه اصابة الصياد الأول للهدف و إصابة الصياد الثاني للهدف أي؛

$$P(E_1\cap E_2)$$

وبما أن الحدثان مستقلان: $\longleftarrow$ $P(E_1\cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$

$$P(E_1\cap E_2) = P(E_1)P(E_2) = (0.8)(0.6) = 0.48$$

B (إصابة الهدف، نقصد هنا باصابة الهدف أنه يتم اصابة الهدف من قبل الصياد الأول أو من قبل الصياد الثاني، ويفسر أيضا أنه اصابة الهدف على الأقل من قبل أحد الصيادين وكلا التفسيرين لهما نفس الحل, نحن نعرف أنه رياضيا نقصد بعبارة أو الاتحاد أو الجمع $\cup$ ، $+$

وبما أن الحدثان غير متنافيين: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$
$$P(E_1 \cup E_2) = (0.8)(0.6) + (0.6) - 0.48$$
$$= 0.92$$

مثال:

أطلق أحد الرماة طلقة واحدة على هدف معين مؤلف من ثلاث مناطق مرقمة 1، 2، 3 ، فإذا علمت أن احتمال وقوع الاصابة في هذه المناطق هو على التوالي: 0.15، 0.23، 0.14،

السؤال هنا هو: ما هو احتمال عدم الاصابة لهذا الهدف

الحل:

نلاحظ أن لدينا هنا ثلاث أحداث، كما أن المطلوب هو الحدث العكسي أي عدم الاصابة

تذكير:

قبل البدء في الحل نتذكر أحد قوانين الاحتمالات وهو الخاص بالاحتمال والاحتمال المعاكس له

$$P(E) + P(\bar{E}) = 1 \rightarrow P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

أولا: اول ما نقوم به هنا هو حساب الاحتمالات المعاكسة؛ أي احتمال عدم الاصابة لأننا نبحث عن احتمال عدم الاصابة

E_1 : حادث اصابة المنطقة 1 ، $\bar{E}_1$: حادث عدم اصابة المنطقة 1

$$P(E_1) = 0.15 \rightarrow P(\bar{E}_1) = 1 - 0.15 = 0.85$$

E_2 : حادث اصابة المنطقة 2 ، $\bar{E}_2$: حادث عدم اصابة المنطقة 2

$$P(E_2) = 0.23 \rightarrow P(\bar{E}_2) = 1 - 0.23 = 0.77$$

E_3 : حادث اصابة المنطقة، $\bar{E}_3$: حادث عدم اصابة المنطقة3

$$P(E_3) = 0.14 \rightarrow P(\bar{E}_3) = 1 - 0.15 = 0.86$$

ثانيا: تحديد هل الأحداث متنافية أم لا ومستقلة أم لا حتى نستطيع تحديد القانون المناسب

الحوادث هنا غير متنافيين لماذا؟ لأن

$$P(\bar{E}_1) + P(\bar{E}_2) + P(\bar{E}_3) = 2.48 > 1$$

الحوادث هنا مستقلة لماذا؟ لأن إصابة أي منطقة مستقل عن المنطقة الأخرى أي؛

$$P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2) = P(\bar{E}_1)P(\bar{E}_2)$$

$$P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_3) = P(\bar{E}_1)P(\bar{E}_3)$$
$$P(\bar{E}_2 \cap \bar{E}_3) = P(\bar{E}_2)P(\bar{E}_3)$$
$$P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3) = P(\bar{E}_1)P(\bar{E}_2)P(\bar{E}_3)$$

ثالثا: تحديد الهدف المطلوب ألا وهو حساب $P(\overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \overline{E_3})$

بما أن الاحداث غير متنافية فإن:

$$P(\overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \overline{E_3}) = P(\bar{E}_1) + P(\bar{E}_2) + P(\bar{E}_3) - P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2) - P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_3) - P(\bar{E}_2 \cap \bar{E}_3) + P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3)$$

ومنه:

$$P(\overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \overline{E_3}) = P(\bar{E}_1) + P(\bar{E}_2) + P(\bar{E}_3) - P(\bar{E}_1)P(\bar{E}_2) - P(\bar{E}_1)P(\bar{E}_3) - P(\bar{E}_2)P(\bar{E}_3) + P(\bar{E}_1)P(\bar{E}_2)P(\bar{E}_3)$$

التعويض العددي:

$$P(\overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \overline{E_3}) = 0.85 + 0.77 + 0.86 - 0.85 \times 0.77 - 0.85 \times 0.86 - 0.77 \times 0.86 + 0.85 \times 0.77 \times 0.86$$
$$= 0.99517$$

بعض قوانين الاحتمال: إذا كانت A و B حدثان من فضاء العينة S فإن::

$$P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$$
$$P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap \bar{B})$$
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$$

الاحتمال الشرطي ونظرية بايز

Conditional Probability And Bay's Theorm.

من الاكيد أن هناك قرارات كثيرة في حياتنا مرتبطة بتحقق حدث آخر، كما أن مدراء الشركات حين يتخذون العديد من القرارات يحتاجون إلى معرفة مدى قدرة تحقق الحدث A بناء على معطيات حدوث حدث أخر B عدث فعلا. مثلا إذا كان مطلوبا من المدير أن يتخذ قرارا بنشر اعلان دعائي لسلعة ما في التلفزيون فانه يكون مهتما بمعرفة ما احتمال أن شخصا ما سيشتري السعة (الحادث A) إذا كان قد حصل أن شاهد الإعلان التلفزيوني (الحادث B).

وهكذا فان احتمال وقوع الحادث **A** يشترط وقوع الحادث **B** يدعى بالاحتمال الشرطي، نقراها كما يلي:

احتمال حدوث الحادث **A** علما أن الحادث **B** قد وقع

احتمال حدوث الحادث **A** شرط أن الحادث **B** قد وقع

احتمال حدوث الحادث **A** إذا كان الحادث **B** قد وقع

$$p(A|B)$$

احتمال حدوث الحادث **A** هنا هو احتمال شرطي لانه يرتبط بحدوث الحادث **B** ويرمز له كالتالي:

قاعدة:

إذا كان $(P;\varepsilon;S)$ فضاء احتماليا وكان B حدثا احتماله لا يساوي الصفر وA حدثا اختياريا فان الاحتمال الشرطي للحدث **A** علما بأن **B** قد وقع هو بالتعريف:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad P(B) \neq 0$$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \qquad P(A) \neq 0$$

خصائص الاحتمال الشرطي:

الخاصية الأولى:

بما أن التقاطع يعبرعن الضرب والضرب تبديلي فإن:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} \qquad P(B) \neq 0$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \qquad P(A) \neq 0$$

الخاصية الثانية:

بحسب القانون الذي درسناه للاحتمال الشرطي نلاحظ الاتي:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \qquad P(A) \neq 0$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(B)P(A|B) \qquad P(B) \neq 0$$

نلاحظ أن التقاطع $P(A \cap B)$ له حالتين للحساب وهذا ما يحدد معرفة الحدث الشرطي من الحدث المحتمل

الخاصية الثالثة:

إذا كان لدينا حدثين متنافيين A وB فان:نحن نعرف أن تقاطع الاحداث المتنافية صفر0

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A \cap B) = 0 \qquad P(A) \neq 0$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$$

أي أنه في حالة الاحداث المتنافية فإن $P(B|A) = 0$

الخاصية الرابعة:

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{A})} \qquad P(A) \neq 0$$

حسب قانون ديمورقان: فإن

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B)$$

$$\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\overline{A\cup B})}{P(\bar{A})} = \frac{1 - P(A\cup B)}{1 - P(A)}$$

الخاصية الخامسة:

إذا كان لدينا الحدثين B وA مستقلين فإن: $P(A\cap B) = P(A)P(B)$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

أي أنه في حالة الاحداث المستقلة فإن: $P(B|A) = P(B)$

الخاصية السادسة:

إذا كان لدينا $A \in B$ مستقلين فإن: $P(A\cap B) = P(A)$

$$P(B|A) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1 = P(B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

الخاصية السابعة:

إذا كان لدينا ا: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 \cap A_1)$$

ويمكن تعميم احتمال ضرب عدة حوادث $A_1, A_2, , , , , A_n$

$$P(A_1 \cap A_2, , , , \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 \cap A_1), , ,,$$

$$, , , , P(A_3|A_2 \cap A_1, , , , , , , , , \cap A_{n-1})$$

الخاصية الثامنة:

إذا كان لدينا ا: $(A$ و B و $C)$ أحداث مستقلة فإن:

$$P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{P(A)P(B)P(C)}{P(B)P(C)} = P(A)$$

ويمكن التعميم كالتالي:

$$P(B|A \cap C) = P(B)$$

$$P(C|A \cap B) = P(C)$$

الخاصية التاسعة:

إذا كان لدينا ا: $(A \text{ و } B \text{ و } C)$ أحداث متنافية. فإن:

$$P\big((A \cup B)\big|C\big) = \frac{P\big((A \cup B) \cap C\big)}{P(C)} = \frac{P\big((A + B) \cap C\big)}{P(C)}$$

$$= \frac{P\big((A) \cap C\big) + P\big((B) \cap C\big)}{P(C)} = \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C)}{P(C)}$$

$$= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = P\big((A)\big|C\big) + P\big((B)\big|C\big)$$

الخاصية العاشرة:

إذا كان لدينا ا: $(A \text{ و } B \text{ و } C)$ أحداث غير متنافية. فإن:

$$P\big((A \cup B)\big|C\big) = \frac{P\big((A \cup B) \cap C\big)}{P(C)} = \frac{P\big((A + B - A \cap B) \cap C\big)}{P(C)}$$

$$= \frac{P\big((A) \cap C\big) + P\big((B) \cap C\big) - P\big((A \cap B) \cap C\big)}{P(C)}$$

$$= \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B) \cap P(C)}{P(C)}$$

$$= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} - \frac{P(A \cap B) \cap P(C)}{P(C)}$$

$$= P\big((A)\big|C\big) + P\big((B)\big|C\big) - P\big((A \cap B)\big|C\big)$$

الخاصية الحادية عشر:

إذا كان لدينا: $(A$ و $B)$ أحداث غير متنافية. فإن:

$$P(\bar{A}|B)=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P\big((1-A)\cap B\big)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(1\cap B)-P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(B)}{P(B)}-\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=1-\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=1-P(A|B)$$

الخاصية الثانية عشر:

إذا كان لدينا: $(A$ و $B)$ أحداث غير متنافية. فإن:

$$P(A|\bar{B})=\frac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(A\cap\bar{B})}{1-P(A)}$$

مثال:

الجدول التالي يبين توزيع العاملين في مصنع ما تبعا للجنس والحالة الوظيفية كالتالي:

الجنس / العمل	عامل	اداري	المجموع
ذكر	78	22	100
أنثى	46	34	80
المجموع	124	56	180

س1. اخترنا شخصا عشوائيا من هذا المصنع، ما احتمال أن يكون رجلا علما أنه عامل.

س2. اخترنا شخصا عشوائيا من هذا المصنع، ما احتمال أن يكون أنثى من الاداريين.

قبل البدء دائما في حل أي تمرين لابد من قراءة الاسئلة جيدا

الحل:

نلاحظ أن السؤال الأول هو احتمال شرطي لان وقوع حادث أن الشخص المختاررجلا مشروط بأن يكون عاملا.

المطلوب الأول هو: احتمال أن يكون الشخص المختار رجلا شرط أنه عامل,

أولا: نحدد الرموز كما نحب.

الحادث A هو حادث خاص بان يكون الشخص رجلا. و $\overline{A}$حادث خاص بان يكون الشخص إمرأة.

الحادث B هو حادث خاص بان يكون الشخص عاملا. و $\overline{B}$حادث خاص بان يكون الشخص إداريا.

في حال أخطأ الطالب وكتب $P(B|A)$ فانه هنا قد عكس السؤال وبالتالي هنا لابد من التأكد جيدا من ما نكتبه

ثانيا: تحديد المطلوب $P(A|B)$،

ثالثا: تحديد القانون المستخدم حسب ما درسناه سابقا

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

رابعا: حساب الاحتمالات المطلوبة

هنا نحسب احتمال أن يكون الشخص المسحوب عاملا دون تحديد هل يتبع الاناث أم الذكور $P(B)$: ،

$$P(B) = \frac{\text{عدد العمال}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{124}{180}$$

$P(A \cap B)$: هنا نحسب احتمال أن يكون الشخص المسحوب رجلا وعاملا في نفس الوقت

$$P(A \cap B) = \frac{\text{عدد العمال الرجال}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{78}{180}$$

خامسا: حساب الاحتمال المطلوب $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{78/180}{124/180} = \frac{78}{124} = 0.629$$

المطلوب الثاني هو: احتمال أن يكون الشخص المختار أنثى شرط أنها من الاداريين.

باتباع الخطوات السابقة:

$$P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{34/180}{56/180}=\frac{34}{56}=0.607$$

مثال:

إذا كان لدينا:

$$P(E_1)=0.7 \qquad P(E_2)=0.8 \qquad P(E_1\cap E_2)=0.6$$

أحسب:

$$a)\quad P(E_1|E_2) \qquad b)\quad P(E_2|E_1) \qquad c)\quad P(E_1|\overline{E_2})$$
$$d)\quad P(\overline{E_1}|E_2) \qquad e)\quad P(\overline{E_1}|\overline{E_2})$$

الحل:

بالنسبة للحالة a و b نستخدم القانون العادي للاحتمال الشرطي:

$$a)\quad P(E_1|E_2)=\frac{P(E_1\cap E_2)}{P(E_2)}=\frac{0.6}{0.8}$$
$$b)\quad P(E_2|E_1)=\frac{P(E_2\cap E_1)}{P(E_1)}=\frac{0.8}{0.6}$$

بالنسبة للحالة c نستخدم الخاصية الثانية عشر:

$$c)\ P(E_1|\overline{E_2})=\frac{P(E_1\cap\overline{E_2})}{P(\overline{E_2})}=\frac{P(E_1)-P(E_1\cap E_2)}{1-P(E_1)}=\frac{0.7-0.6}{1-0.8}=\frac{1}{2}$$

بالنسبة للحالة b نستخدم الخاصية الحدية عشر:

$$d)\quad P(\overline{E_1}|E_2)=\frac{P(\overline{E_1}\cap E_2)}{P(E_2)}=1-\frac{P(E_1\cap E_2)}{P(E_2)}=1-\frac{0.6}{0.8}=\frac{2}{8}$$

بالنسبة للحالة e ستخدم قانون ديمورقان الذي تم التطرق إليه في الخاصية الرابعة:

$$e)\quad P(\overline{E_1}|\overline{E_2})=\frac{P(\overline{E_1}\cap\overline{E_2})}{P(\overline{E_2})}=\frac{P(\overline{E_1\cup E_2})}{P(\overline{E_2})}$$
$$\frac{1-P(E_1\cup E_2)}{1-P(E_2)}=\frac{1-[P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\cap E_2)]}{1-0.8}$$
$$=\frac{1-[0.7+0.8-0.6]}{1-0.8}=\frac{1-[0.9]}{0.2}=\frac{0.1}{0.2}=\frac{1}{2}$$

مثال:

إذا كان لدينا:

$$P(E_1|E_2) = 0.3 \qquad P(E_2) = 0.45$$

أحسب:

$$a) \quad P(E_1 \cap E_2) \qquad b) \quad P(\overline{E_1} \cup \overline{E_2})$$

الحل:

$$a) \quad P(E_1 \cap E_2) = P(E_1|E_2)P(E_2)$$
$$= 0.3 \times 0.45$$
$$= 0.135$$
$$b) \quad P(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}) = P(\overline{E_1 \cap E_2})$$
$$= 1 - P(E_1 \cap E_2)$$
$$= 1 - 0.135$$
$$= 0.865$$

مثال:

أظهر تصنيف لطلاب الجامعة أن 10 بالمائة من الطلاب يدخنون،وأن 30 بالمائة من الطلاب يشربون القهوة ، وأن 5 بالمائة من الطلاب يدخنون ويشربون القهوة,

أ) أحسب النسبة المئوية للطلاب الذين لا يدخنون ولا يشربون القهوة؟

ب) من بين الطلاب المدخنين ماهي نسبة الطلاب الذين يشربون القهوة؟

ج) من بين الطلاب الذين لا يشربون القهوة ما هي نسبة المدخنين؟

الحل:

قبل البدء في الحل لابد ان نعرف أن النسبة هي الاحتمال مضروب في 100 حيث ان النسبة تساوي $\frac{n}{N}100$ أما الاحتمال فهو $\frac{n}{N}$

أولا: نحدد الرموز كما نحب.

الحادث A هو حادث خاص بان يكون الطالب مدخنا. و $\bar{A}$ حادث بان يكون الطالب غير مدخن.

الحادث B هو حادث بان يكون الطالب يشرب القهوة.

و $\bar{B}$ حادث خاص بان الطالب لا يشرب القهوة.

ثانيا: تحديد المطلوب

أ) حساب النسبة المئوية للطلاب الذين لا يدخنون ولا يشربون القهوة

نبحث هنا عن نسبة الطلاب الذين لا يدخنون **و** لا يشربون القهوة،أي أننا نبحث هنا عن **التقاطع**

أي، $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

حسب قانون **ديموروقان** المذكور في الخاصية الرابعة فإن:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$
$$= 1 - [0.10 + 0.30 - 0.05]$$
$$= 0.65$$

أي أن **65** بالمائة من الطلاب لا يدخنون ولا يشربون القهوة.

ب) من بين الطلاب المدخنين ماهي نسبة الطلاب الذين يشربون القهوة

نفهم من السؤال هنا أن الشرط هنا أو العلوم هو أن الطالبة يدخن فما احتمال أن يكون يشرب القهوة، أي اننا هنا أمام احتمال شرطي وحسب قانون الاحتمال الشرطي فإن:

$P(B|A)$ وتقرأ كما يلي: ما حتمال حدوث الحادث B الذي يمثل الطلبة المدخنين علما أن الطالب المختار هو من الذين يشربون القهوة والذي يمثل الحادث A

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.05}{0.10} = \frac{1}{2} = 0.50$$

أي أن 50 بالمائة من الطلبة المدخنين يشربون القهوة

ج) من بين الطلاب الذين لا يشربون القهوة ما هي نسبة المدخنين؟

نفهم من السؤال هنا أن الشرط هنا أو العلوم هو أن الطالبة لا يشربون القهوة فما احتمال أن يكونو مدخنين، أي اننا هنا أمام احتمال شرطي وحسب قانون الاحتمال الشرطي فإن:

$P(A|\bar{B})$ وتقرأ كما يلي: ما حتمال حدوث الحادث A الذي يمثل الطلبة الذين يشربون القهوة المدخنين علما أن الطالب المختار هو من الذين لا يدخنون

بالرجوع للخاصية الثانية عشر التي تم دراستها فإن:

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap \bar{B})}{1 - P(A)} = \frac{0.10 - 0.05}{1 - 0.30} = 0.071$$

مثال:

كيس يحتوي على 3 كرات سوداء و7 كرات بيضاء، إذا سحبنا منه كرتين كل كرة على حدى ودون إرجاع،

أرسم الشجرة الاحتمالية وحدد ل الحالات المركبة الممكنة.

الحل:

قبل البدء في الحل لابد ان نعرف أن ننتبه إلى طبيعة السحب والى عدد الكرات المسحوبة

أولا: عدد الكرات المسحوبة هو كرتين

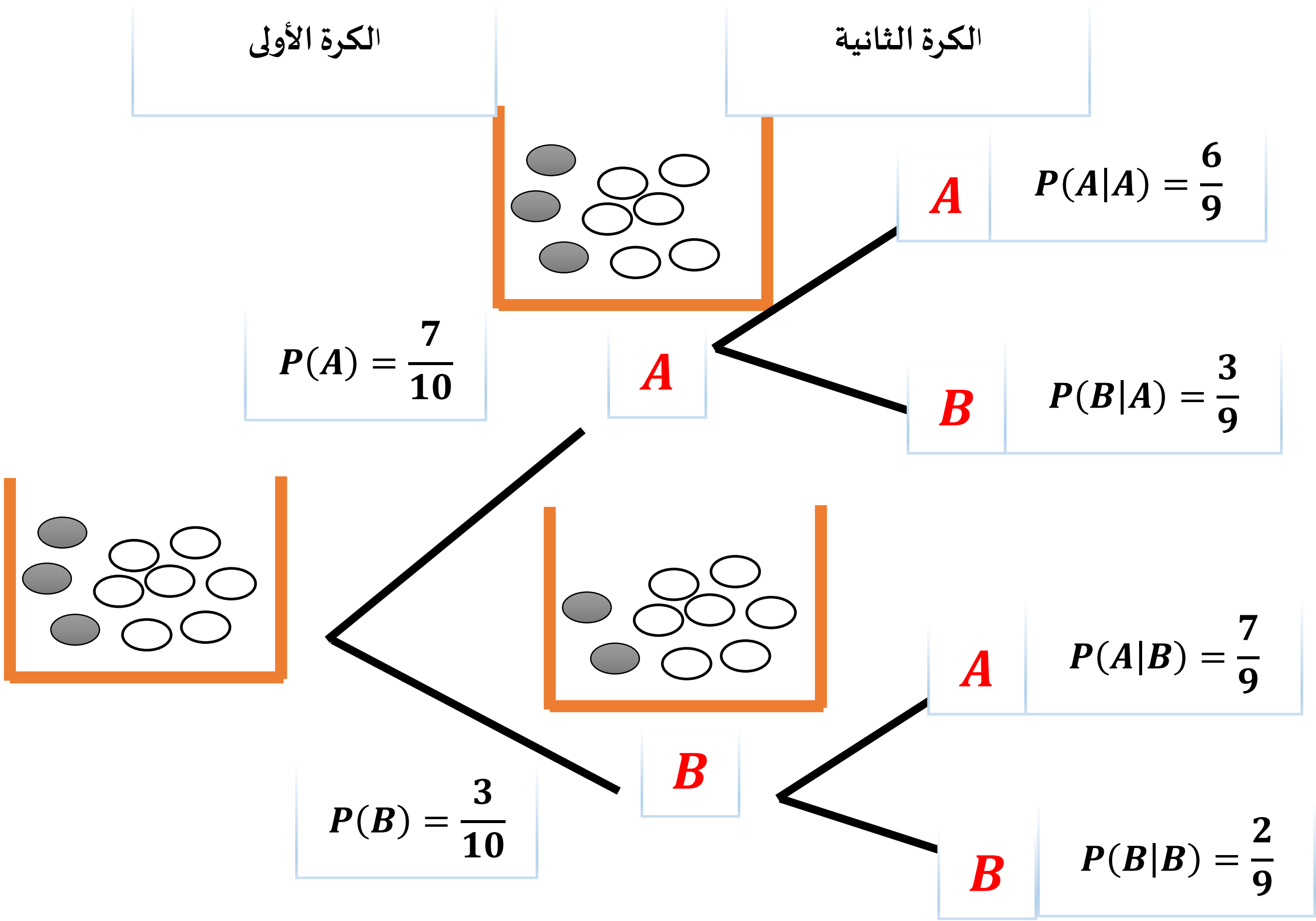
طريقة السحب هي: كل كرة على حدى دون ارجاع أي؛

الكرة الاولى نسحبها من كيس به 10 كرات والكرة الثاني نسحبها من كيس به 9 كرات,

ثانيا: نحدد الرموزكما نشاء المهم أن نلتزم بها,

نرمزلحادث سحب الكرة البضاء بالرمز A

نرمزلحادث سحب الكرة السوداء بالرمز B

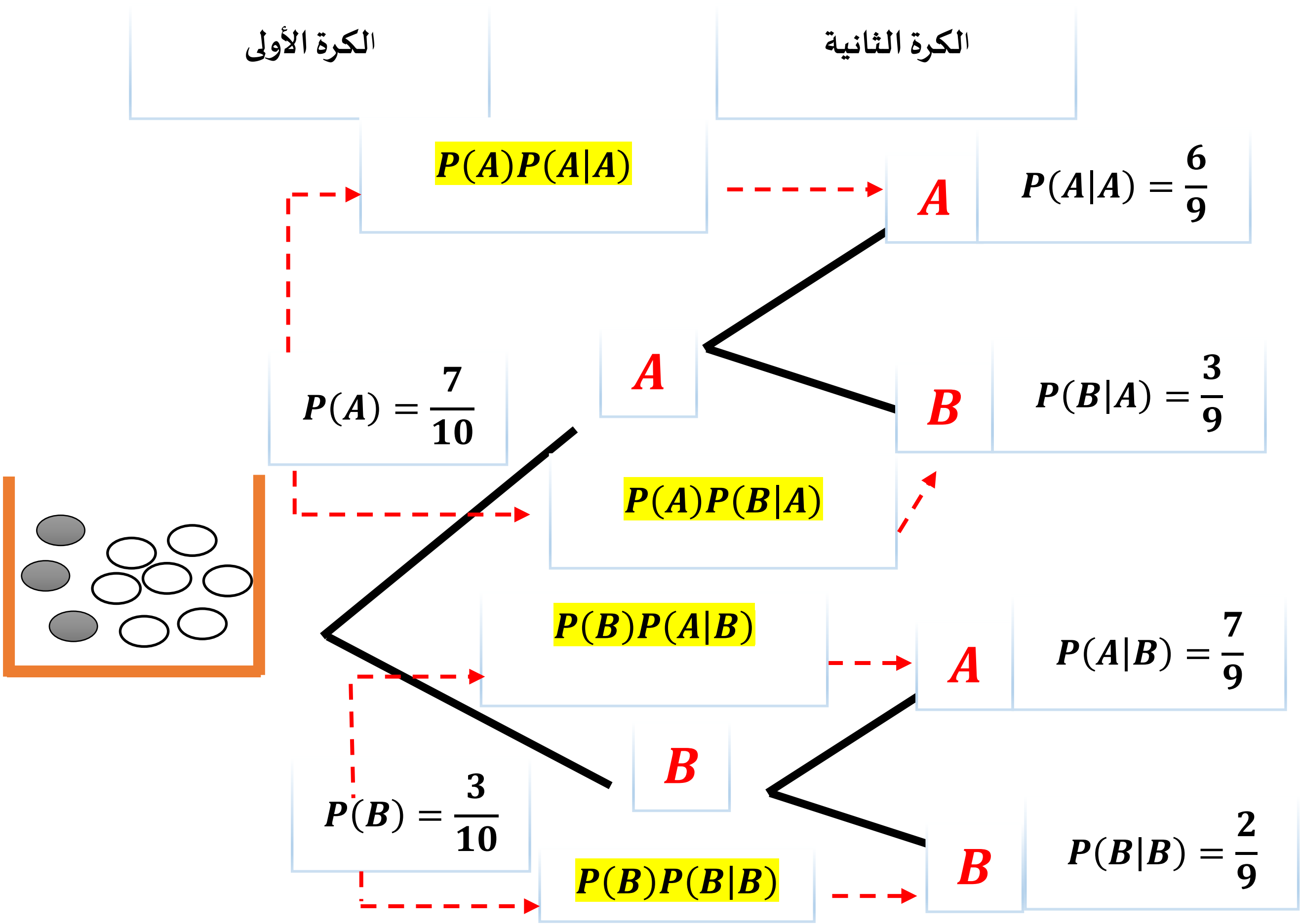


من خلال الشجرة الاحتمالية نلاحظ أن الكيس قبل سحب الكرة الأولى به 10 كرات وفي الكرة الثانية بقي به 9 كرات لكنه يختلف حسب الكرة المسحوبة في السحبة الأولى، بمعنى أنه عندما سحبنا منه كرة بيضاء بقي في الكيس 6 كرات بيضاء و3 كرات سوداء، وعندما كانت الكرة الأولى المسحوبة هي كرة سوداء نلاحظ أنه بقي في الكيس كرتي سوداوتين و7 كرات بيضاء أي باجمالي 9 كرات، لذلك على الطالب أن يدرك أن الكيس الأول يختلف عن الكيس الثاني حسب ما تم سحبه,

ملاحظة جد مهمة : حتى لا تختلط على الطالب وتصعب عليه الأمورلابد عليه بأن يستعين بالشجرة الاحتمالية التي من شأنها توضيح مراحل الاحتمال بالتفصيل

تحديد كل الثنائيات الممكنة (الحالات المركبة الممكنة) عند سحب كرتين,

كما قلنا سابقا لابد أن نستعين لاشجرة الاحتمالية حتى يسهل علينا حل أي سؤال:



من خلال الشجرة نلاحظ أن هناك أربع ثنائيات كالتالي:

الحالة الاولى: سحب كرتين بيضاوتين كرة بيضاء في السحبة الاولى وكرة بيضاء في السحبة الثانية شرط أن السحبة الأولى بيضاء $P(A)P(A|A)$

الحالة الثانية: سحب كرة بيضاء والثانية سوداء ؛ الكرة الاولى بيضاء والثانية سوداء علما أن الاولى بيضاء $P(A)P(B|A)$

الحالة الثالثة: سحب كرة سوداء والثانية بيضاء ؛ الكرة الاولى سوداء والثانية بيضاء علما أن الاولى سوداء $P(B)P(A|B)$

الحالة الرابعة: سحب كرتين سوداوتين كرة سوداء في السحبة الاولى وكرة سوداء في السحبة الثانية شرط أن السحبة الأولى سوداء $P(B)P(B|B)$

مثال:

لدينا صندوق يحتوي على 10 كرات بيضاء و5 كرات سوداء، نسحب منه 4 كرات على التوالي دون ارجاع

أوجدإحتمال أن تكون إحدى هذه الكرات سوداء,

الحل:

السحب هنا على التوالي ودون ارجاع، كما أن عدد المسحوب هو أربع كرات

أولا: لابد أن نفهم ما المقصود بالسؤال

نفهم من السؤال القائل أن تكون إحدى هذه الكرات سوداء أي؛ على الأقل كرة سوداء واحدة،

نرمزللكرة السوداء A والكرة البيضاء B

أي أننا بصدد البحث عن $P(A)$ وهذا الحادث يتحقق بعدد كبير من الحالات وحتى نتجنب كثرة الحالات نقوم بحساب الحدث المعاكس $P(\bar{A})$ وذلك لان الحادث المعاكس يعبرعن ان كل الكرات المسحوبة ليست بيضاء أي سوداء.

هنا لابد أن نحدد لكل كرة في أي سحبة رمز:

B_1:الكرة الأولى بيضاء، B_2: الكرة الثانية بيضاء،

B_3: الكرة الثالثة بيضاء، B_4 : الكرة الرابعة بيضاء،

ومنه: $\bar{A} = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4$

حسب قانون الضرب الذي تم التطرق له في الخاصية السابعة:

$$P(A_1 \cap A_2,,,,\cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 \cap A_1),,,,$$
$$,,,,P(A_3|A_2 \cap A_1,,,,,,,,,\cap A_{n-1})$$

فإن :

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) \\ &= P(B_1)\, P(B_2|B_1)P(B_3|B_2 \cap B_1)P(B_4|B_1 \cap B_2 \cap B_3) \\ &= \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} = \frac{2}{13} \end{aligned}$$

ومنه:

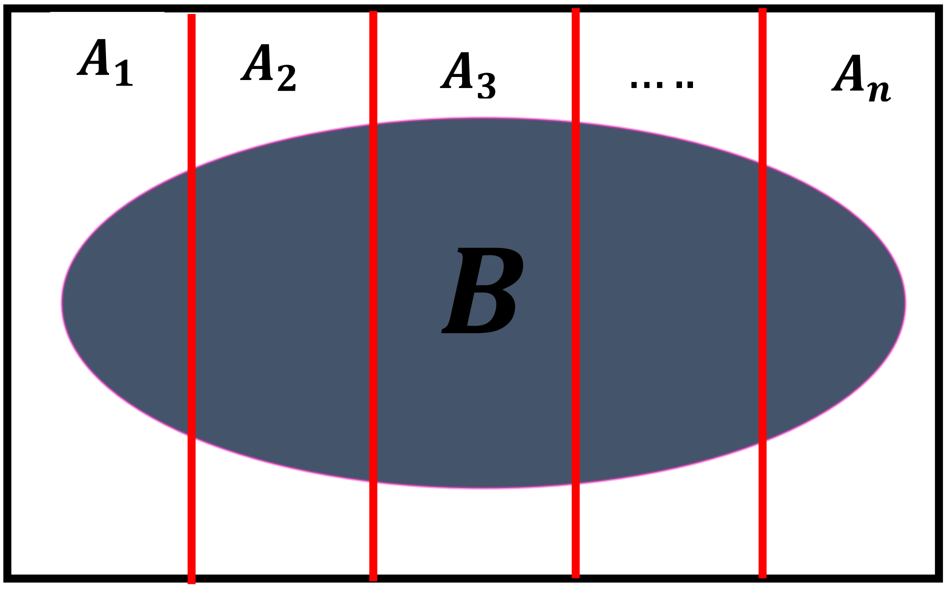
$$P(\bar{A}) + P(A) = 1 \rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{13} = \frac{11}{13}$$

نظرية التجزئة
Theorm

إذا كان لدينا $A_1 . A_2 . A_3 \dots \dots A_n$ مجموعة من الحوادث تشكل تجزئة لفضاء عينة S وكان B حدث يمكن أن يقع مع أي حدث من هذه المجموعة فإن احتمال وقوع الحدث S يعطي العلاقة،

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots \dots . P(A_n)P(B|A_n)$$

ولتوضيح ما تم ذكره نستخدم شكل فن التالي:



من الواضح أن

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \dots \cup (A_n \cap B)$$

وبحساب الاحتمال للطرفين وبملاحظة أن الطرف الأيمن هو اتحاد لحوادث متنافية نجد أن:

$$B = (A_1 \cap B) + (A_2 \cap B) + \cdots \dots . +(A_n \cap B)$$

وبتطبيق قاعدة ضرب الاحتمالات نجد أن:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots \dots . P(A_n)P(B|A_n)$$

مثال:

لدينا ثلاث طرق تؤدي الى بئر العاتر من ولاية قالمة، إختار شخص أحد هذه الطرق عشوائيا،

إذا اختار الطريق الأول فاحتمال وصوله الى إلى بئر العاتر هو $\frac{1}{8}$

إذا اختار الطريق الثاني فاحتمال وصوله الى إلى بئر العاتر هو $\frac{1}{4}$

إذا اختار الطريق الثالث فاحتمال وصوله الى إلى بئر العاتر هو $\frac{1}{3}$

أوجد احتمال أن يصل الشخص إلى بئر العاتر

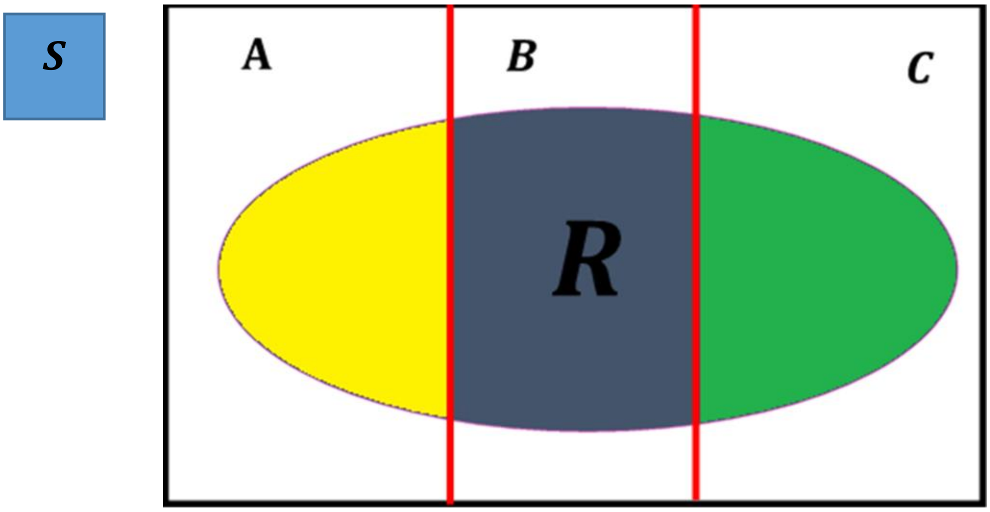
الحل:

الحدث A هو اختيار الطريق الأول

الحدث B هو اختيار الطريق الثاني

الحدث C هو اختيار الطريق الثالث

نلاحظ أن الأحداث A و B و C تشكل تجزيء لفضاء العينة S المرافق لتجربة الاختيار العشوائي للوصول إلى بئر العاترولیكن الحادث R يمثل الوصول إلى بئر العاترووبين الحدث R بالجزء المظلل في الشكل التالي:



وبما أن المطلوب هنا هو حساب $P(R)$ ؛ أي أن الهدف هنا هو حساب احتمال الوصول مهما كان الطريق

وبما أن الاختيار عشوائي فمعناه أن احتمال اختيار أي طريق هو $\frac{1}{3}$، أي:

$$P(B) = P(A) = P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(R|A) = \frac{1}{8} \qquad P(R|B) = \frac{1}{4} \qquad P(R|C) = \frac{1}{3}$$

وبالاستعانة بالشكل السابق يمكن حساب الاحتمال الكلي كالتالي:

$$P(R) = P(A)P(R|A) + P(B)P(R|B) + P(C)P(R|C)$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = 0.236$$

نظرية بايز

Bay's Theorm.

افترض أننا نعرف الاحتمالات الشرطية للحدث لجميع "الأسباب" المحتملة لهذا الحدث. يمكننا استخدام هذه المعلومات للعثورعلى احتمال أحد تلك الأسباب المحتملة، على أساس أن هذا الحدث قد وقع.

نفرض أن $A_1 . A_2 . A_3 \dots \dots A_n$ حوادث مستقلة ومتنافية من فضاء العينة S آخر, فإن:

حيث أن:

$$P(A) \neq 0 \quad ; \qquad i = 1; \dots \dots \dots . n$$

وأن B أي حدث من فضاء العينة S بحيث أن

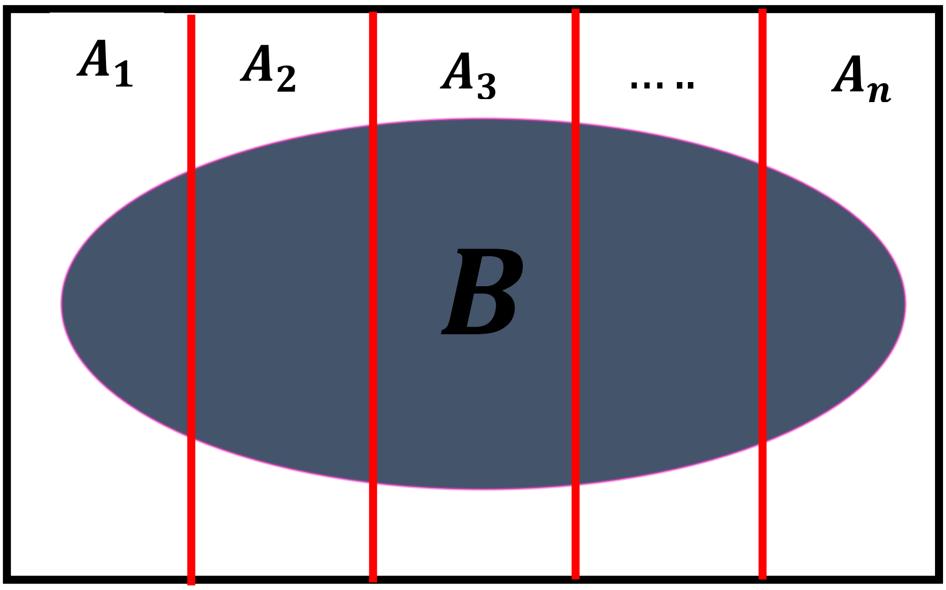
$$P(B) \neq 0 \quad ; \qquad i = 1; \dots \dots \dots . n$$

ومنه فان قانون بايز هو كالتالي:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B|A_k)P(A_k)}$$

البرهان:

يمكن توضيح الحوادث وفراغ العينة بشكل فن كالتالي:



من الشكل نلاحظ أن الحادثة B عبارة عن اتحاد مجموعة من الأحداث المتنافية التالية:

$$A_1B.A_2B \dots \dots .A_nB$$

أي أن:

$$B = A_1B \cup A_2B \cup \dots \dots .\cup A_nB$$

وحسب قاعدة الاتحاد عند الاحداث المتنافية المذكورة سابق فان:

$$P(B) = P(A_1B) + P(A_2B) + \cdots \dots . + P(A_nB)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_kB)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B|A_k)P(A_k) \dots \dots \dots \dots .1$$

ومن تعريف الاحتمال الشرطي

$$P(A_i|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} \dots \dots \dots \dots .2$$

من 1 و 2 نحصل على:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_k)P(A_k)}$$

مثال:

مدرسة ثانوية من ثلاث صفوف ، ربع المدرسة في الصف الأول وثلثها في الثاني، إذا كان سدس طلاب الصف الأول وربع طلاب الصف الثاني وثلث طلاب الصف الثالث أعضاء في الجمعية الرياضية إخترنا طالبا بصفة عشوائية فكان عضوفي الجمعية، فما احتمال أنه من الصف الأول.

الحل:

دائما قبل الحل لابد من فهم السؤال جيدا وتلخيص المعطيات جيدا, وافظل طريقة هنا للتلخيص هي الشجرة الاحتمالية

أولا: لابد من تحديد الرموزوالنسب بالارقام

نرمزلطلاب الصف الأول بالرمز $P(A_1)$ وتمثل $\frac{1}{4}$ من العدد الاجمالي

نرمزلطلاب الصف الثاني بالرمز $P(A_2)$ وتمثل $\frac{1}{3}$ من العدد الاجمالي

نرمزلطلاب الصف الأول بالرمز $P(A_3)$ وتمثل الباقي أي $\frac{5}{12}$ وتم حسابه كما يلي:

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + P(A_3) = 1 \rightarrow P(A_3) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \rightarrow P(A_3) = \frac{5}{12}$$

أما بالنسبة للانتماء للجمعية فنرمزله بالرمز C

هنا لابد من التركيز في كتابة الرموز والتعبيرعن الطلبة الذين ينتمون للجمعية

من **الاخطاء الشائعة** لدى الطلبة في الحل هنا هي أن الطالب يعبرعن المعطيات كالتالي:

طلبة الصف الاول الذين ينتمون للجمعية بالرمز $P(C)$ والخطأ هنا أن $P(C)$ لا يبين الي اي صف ينتمي الطلبة المقصودين بل هنا يفهم على المجمل أي نفهم من $P(C)$ الطلبة الذين ينتمون للجعية وهم من كل الفصول، لذا الاصح هو أن نكتب كما يلي: $P(C|A_1)$ نفس الشيء بالنسبة لكل الصفوف,

$P(C|A_1)$ الطلبة الذين ينتمون الى الجمعية وهم من الصف الاول, $\frac{1}{6}$

$P(C|A_2)$ الطلبة الذين ينتمون الى الجمعية وهم من الصف الثاني, $\frac{1}{4}$

$P(C|A_3)$ الطلبة الذين ينتمون الى الجمعية وهم من الصف الثالث, $\frac{1}{3}$

ثانيا: تحديد المطلوب

إذا كان الطالب المختارعشوائيا **عضوفي الجمعية، فما احتمال** أنه من **الصف الأول**,

نعبرعنها كما يلي:

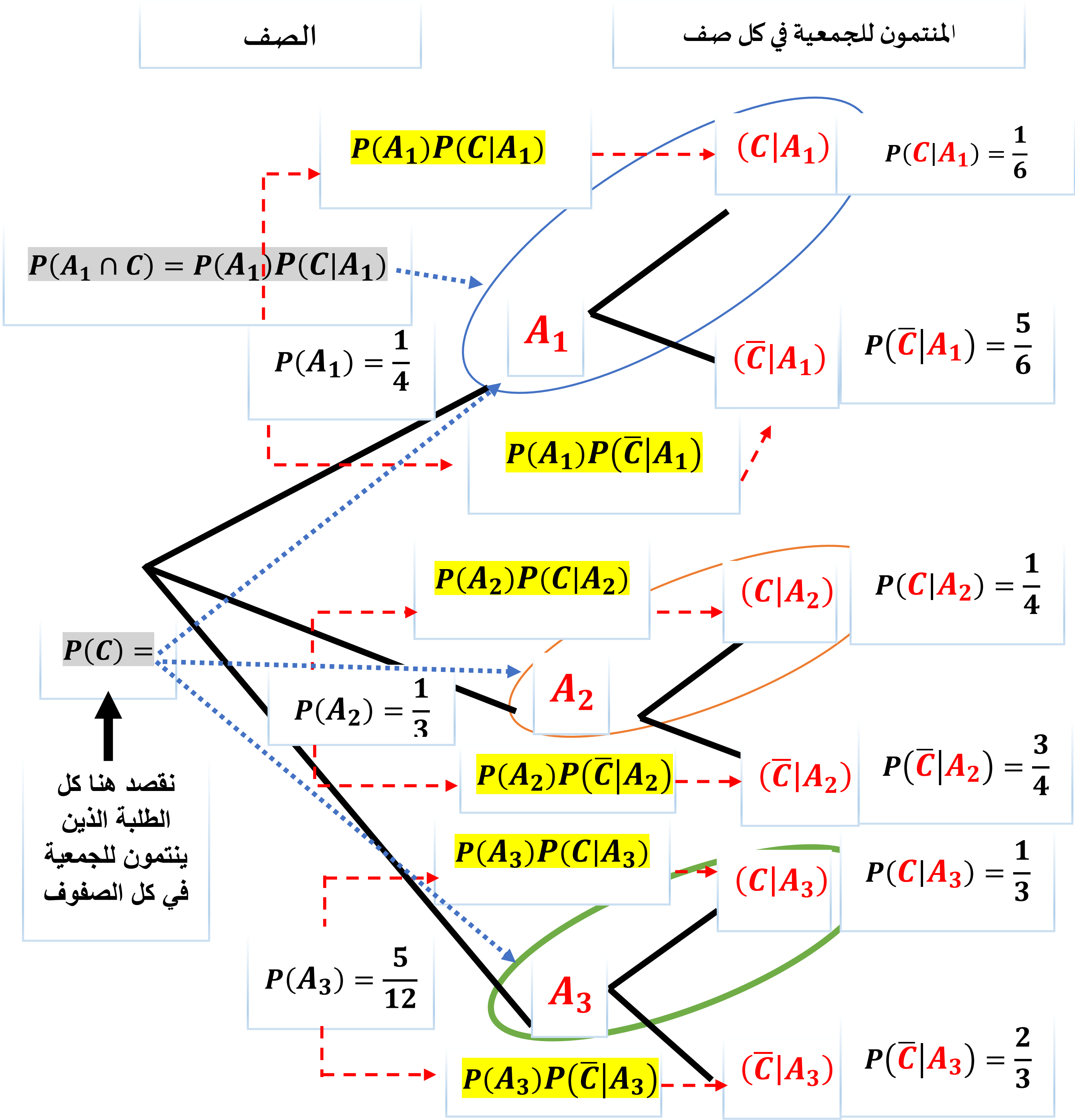
$P\left(A_1 \text{ نكتب هنا الاحتمال } \middle| C \text{ نكتب هنا الشرط أو نكتب المعلوم}\right)$

ومنه المطلوب هو: $P(A_1|C)$

وحسب قانون الاحتمال الشرطي فان:

$$P(A_1|C) = \frac{P(A_1 \cap C)}{P(C)}$$

وكما قلنا حتى نفهم أكثر لابد من رسم الشجرة



من خلال الشجرة قد بينا كل ما هو مطلوب

نقصد بـ $P(A_1\cap C)$ الطلبة الذين ينتمون إلى الصف الاول وهم يتبعون الجمعية وعبرنا عليها في الرسم بالدائرة الاولى الملونة بالون الازرق، أي:

$$P(A_1 \cap C) = P(A_1)P(C|A_1)$$

نقصد بـ $P(C)$ كل الطلبة الذين ينتمون للجمعية مهما كان صفهم وبالتالي هنا سنجمع كل من الطلبة الذين ينتمون للجمعية من الصف الأول مع الطلبة الذين ينتمون للجمعية من الصف الثاني مع الطلبة الذين ينتمون للجمعية من الصف الثالث، أي أن:

$$P(C) = P(A_1)P(C|A_1) + P(A_2)P(C|A_2) + P(A_3)P(C|A_3)$$

ومنه فإن:

$$P(A_1|C) = \frac{P(A_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A_1)P(C|A_1)}{P(A_1)P(C|A_1) + P(A_2)P(C|A_2) + P(A_3)P(C|A_3)}$$

وهذا ما سميناه سابقا **قانون بايز** وهو في الحقيقة يعتمد على مبدا الاحتمال الجزئي على الاحتمال الكلي لذا لابد من أن يكون المقام دائما جزء من البسط واذا لم يكن كذلك فاعلم ان هناك خطأ ما والجزء هنا هو

$$P(A_1)P(C|A_1)$$

ومنه فإن:

$$P(A_1|C) = \frac{P(A_1)P(C|A_1)}{P(A_1)P(C|A_1) + P(A_2)P(C|A_2) + P(A_3)P(C|A_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{6}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{12} \times \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3}{10}$$

تساؤل

قد يتساؤل الطالب هنا ويقول ماذا نفعل لو كان السؤال: ماهو احتمال أن يكون الطالب لاينتمي لاي جمعية وهو من الفصل الثاني

إذا كان السؤال هو: ماهو احتمال أن يكون الطالب لاينتمي لاي جمعية وهو من الفصل الثاني نعبر عنه كما يلي: $P(A_2|\bar{C})$

$$P(A_2|\bar{C}) = \frac{P(A_2 \cap \bar{C})}{P(\bar{C})}$$

كما قلنا سابقا لابد للرجوع للمخطط حتى يسهل علينا إيجاد $P(A_2 \cap \bar{C})$ والتي نقصد بها أن يكون الطالب من الصف الثاني ولا ينتمي للجمعية/ أما $P(\bar{C})$ فنقصد بها أن يكون الطالب غير منتميا للجمعية بغض النضرعن الفصل أي من كل الفصول. ومنه فإن :

$$P(A_2|\bar{C}) = \frac{P(A_2 \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(A_2)P(\bar{C}|A_1)}{P(A_1)P(\bar{C}|A_1) + P(A_2)P(\bar{C}|A_2) + P(A_3)P(\bar{C}|A_3)}$$

نفس الملاحظة السابقة الاحتمال الجئي على الاحتمال الكلي والاحتمال الجئي يكون في البسط وفي المقام وهو $P(A_2)P(\bar{C}|A_1)$

بالتعويض العددي نجد:

$$P(A_2|\bar{C}) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}}{\frac{1}{4} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{5}{12} \times \frac{2}{3}} = \frac{9}{53}$$

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

سبق وأن درسنا سابقا التجربة العشوائية وفراغ العينة والحدث واحتمالات حدوث هذه الاحتمالات في هذا القسم لن يكون اهتمامنا بدراسة نقاط فراغ العينة لكن سيكون اهتمامنا منصبا على قيم عددية مرتبطة بنقاط فراغ العينة هذه القيم العددية تسمى بالمتغير العشوائي, سندرس في هذا الفصل المتغيرات العشوائية وتوزيعاتها وتوقعاتها وتبايناتها سواء في الحالة المتقطعة أو في الحالة الحالة المتصلة,

المتغير العشوائي
Random Variable

يعرف المتغير العشوائي بصورة مبسطة على أنه دالة ذات قيم عددية حقيقية معرفة على فراغ العينة s ومجاله المقابل $X(s)$ هو مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

وبصورة أكثر بساطة يمكن أن نعرف المتغير العشوائي بأنه المتغير الذي يمكن الحصول على قيمته نتيجة لتجربة عشوائية

وينقسم إلى قسمية :

المتغير العشوائي المتقطع (المنفصل)

المتغير العشوائي المتصل (المستمر)

وستم تناول كل منهما بالشرح والأمثلة كما يلي:

المتغير العشوائي المتقطع (المنفصل)

نقول أن المتغير العشوائي متقطع أو منفصل إذا كان يأخذ قيما تنتمي إلى مجموعة محدودة أو معدودة، إي يأخذ قيما منفصلة ومتباعدة عن بعضها البعض. ومن أمثلة المتغير العشوائي المتقطع

عدد الصور التي تظهر عند رمي قطعة نقود n مرة،

الرقم الذي يظهر عند رمي حجر النرد مرة أو أكثر

عدد الوحدات المعيبة عند سحب عينة n من إنتاج إحدى الآلات.

مثال:

ألقيت قطعت نقود متزنة ثلاث مرات، أوجد القيم الممكنة للمتغيرات العشوائية التالية:

أ) X عدد مرات ظهور الصورة,

ب) Y مربع عدد مرات ظهور الصورة,

أ) Z الفرق بين عدد مرات ظهور الصورة عدد مرات ظهور الكتابة.

أوجد مايلي:

$$P(X). \quad P(Y) \quad P(Z) \quad P(X>1) \quad P(X\leq 1)$$
$$P(Y>3) \quad P(20\geq Y>3)$$
$$P(Z>10)$$

الحل:

فراغ العينة هو S:

$$S=\{HHH.HHT.HTH.THH.HTT.THT.TTH.TTT\}$$

أ) المتغير العشوائي X قيمه الممكنة $X(s)$ هي:

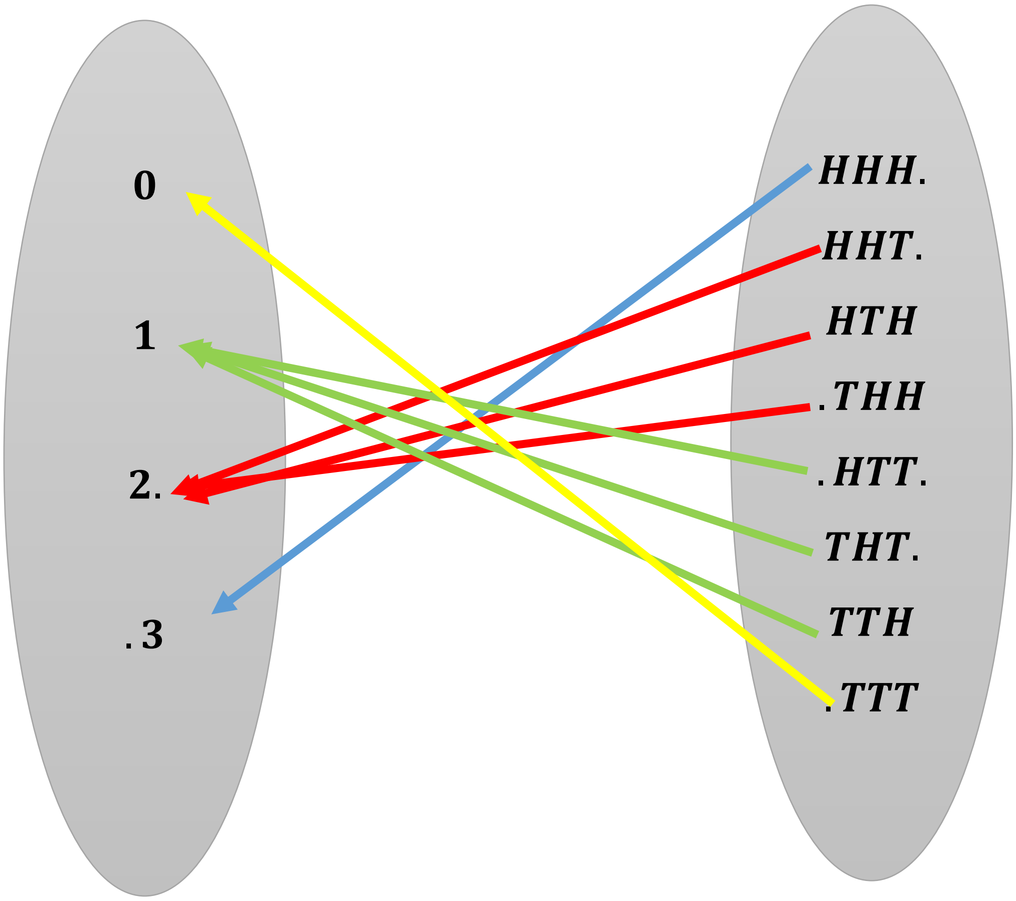
$$X(s)=\{0.1.2.3\}$$

فراغ العينة S	HHH	HHT	HTH	THH	HTT	THT	TTH	TTT
X	3	2	2	2	1	1	1	0

بمعنى انه يمكن أثناء الرمية ان يكون عدد ظهور الصورة هو صفر 0 $\{.TTT\}$ ويمكن أن تظهر الصورة مرة واحدة خلال الرميات الثلاث 1 $\{.HTT.THT.TTH.\}$ ، كما يمكن أن تظهر الصورة مرتين أي 2 $\{.HHT.HTH.THH.\}$، ويمكن أن تظهر الصورة ثلاث مرات 3 كما يلي: $\{HHH.\}$

لذلك قلنا أن قيم المتغير العشوائي هي: $X(s)=\{0.1.2.3\}$

ويمكن توضيح ذلك بالرسم التالي:



$X(.TTT) = \{0\}$

$X(HTT) = \{1\}.\ (THT) = \{1\} \qquad X(TTH) = \{1\}$

$X(HHT) = \{2.\}.\ (HTH) = \{2.\} \qquad X(THH) = \{2.\}$

$X(HHH) = \{.3\}$

أ) القيم الممكنة للمتغير العشوائي Y قيمه الممكنة $Y(s)$ هي:

لابد من قراءة تعريف المتغير العشوائي جيدا حتى
يسهل علينا تحديد قيمه

المتغير العشوائي هو ضعف

القيم التي تعبر عن عدد الصور الممكنة ونحن قلنا سابقا:

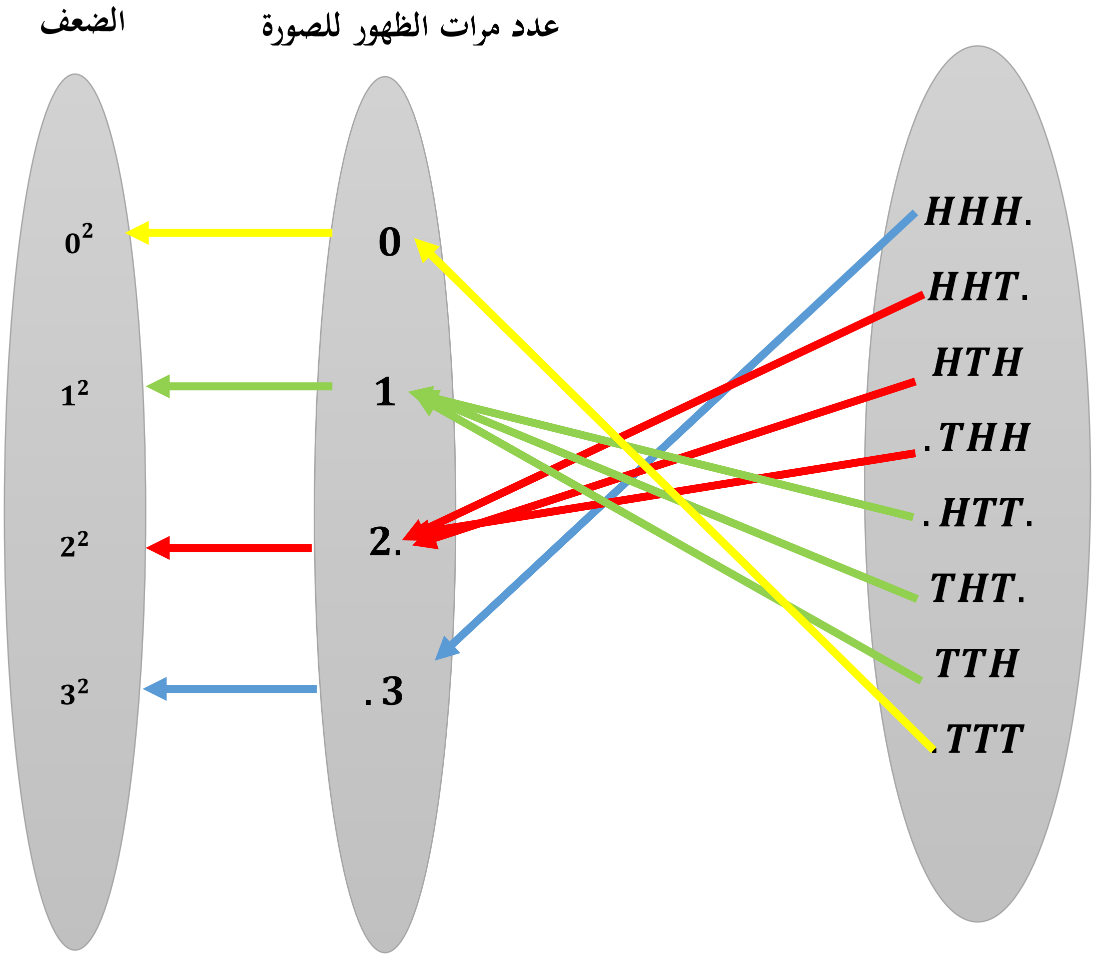
$$Y(s) = \{0.1.4.9\}$$

بمعنى انه يمكن أثناء الرمية ان يكون عدد ظهور الصورة هو صفر **0** $\{.TTT\}$ وضعفه **0**

ويمكن أن تظهر الصورة مرة واحدة خلال الرميات الثلاث **1** $\{.HTT.THT.TTH.\}$ ، وضعفه **1**

كما يمكن أن تظهر الصورة مرتين **2** أي $\{.HHT.HTH.THH.\}$، وضعفه **4**

ويمكن أن تظهر الصورة ثلاث مرات **3** كما يلي: $\{HHH.\}$ وضعفه **9**

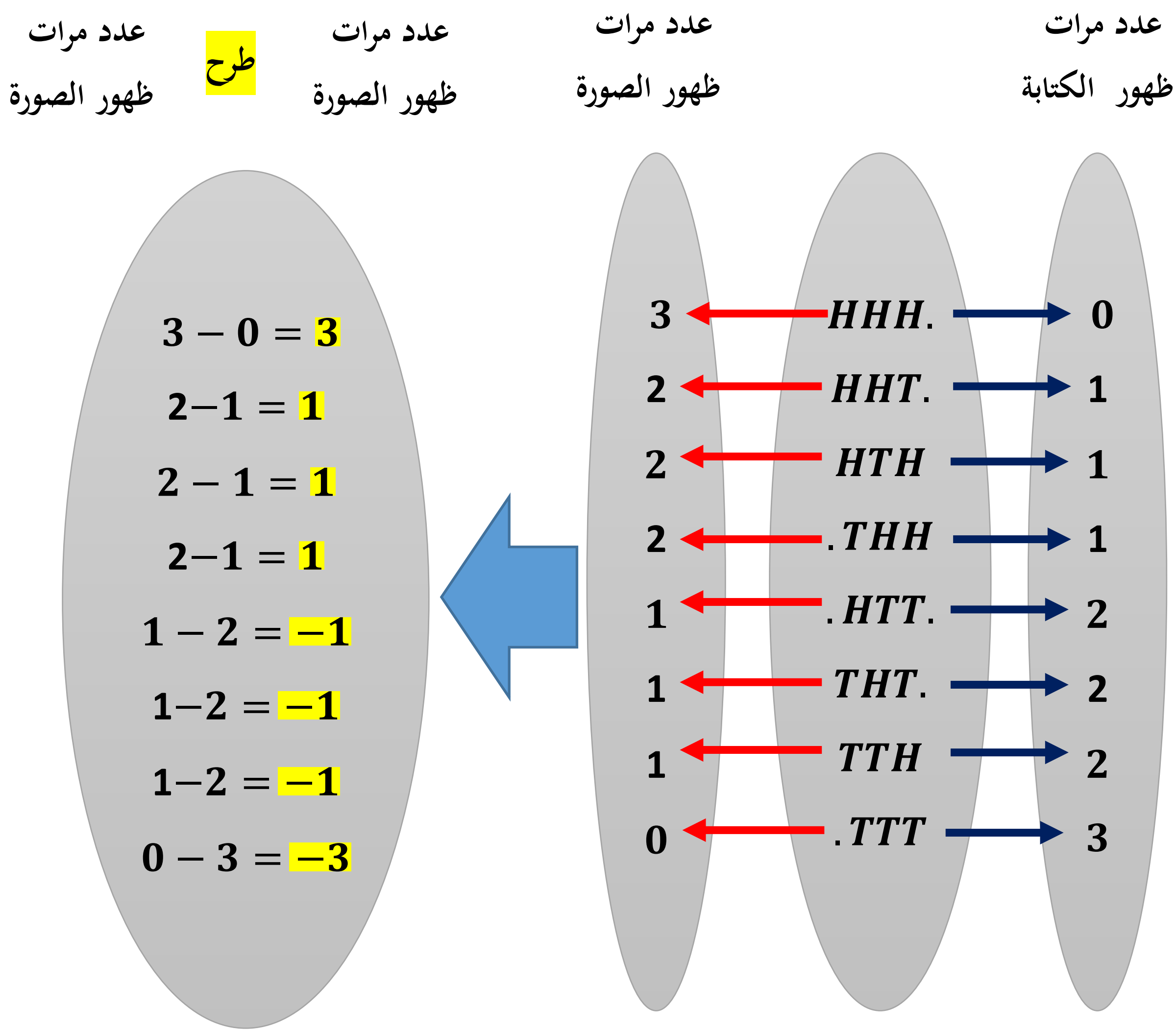


ومنه هنا فإن قيم المتغير العشوائي $Y(s)$ هي:

$$Y(s) = \{0.1.4.9\}$$

ج) القيم الممكنة للمتغير العشوائي Z قيمه الممكنة $Z(s)$ هي:

المتغير العشوائي Z يعبر عن الفرق بين عدد مرات ظهور الصورة عدد مرات ظهور الكتابة بمعنى اذا ظهرت لدين صورتين وكتابة نقوم بطرح اثنين من واحد ونسجل النتيجة



من خلال طرح عدد مرات ظهور الصورة من عدد مرات ظهور الصورة نجد أن قيم $Z(s)$ هي:

$$Z(s)=\{3.1.-1.-3\}$$

ولزيادة التوضيح:

$Z(.TTT)=0-3=-3$

$Z(HTT)=1-2=-1\,.\,Z(THT)=1-2=-1\quad Z(TTH)=1-2=1$

$Z(HHT)=2-1=1\,.\,Z(HTH)=2-1=1\quad Z(THH)=2-1=1$

$Z(HHH)=3-0=3$

تابع التوزيع
Probability Distribution Function

ليكن X متغير عشوائي متقطع على فضاء العينة s مجموعة قيم منتهية من الشكل:

$$X(s) = \{x_1 . x_2 \; \dots \dots \dots \dots x_n\}$$

أو غير منتهية من الشكل:

$$X(s) = \{x_1 . x_2 \; \dots \dots \dots \dots\}$$

نسمي التابع التالي:

$$f_{x(X)} : X(s) \to R : x \to f_{x(X)} = P(X = x)$$

نعبر بـ $f(x)$ على تابع التوزيع أو تابع الكتلة الاحتمالية *Function Probability mass* للمتغير العشوائي X

يحقق $f_{x(X)}$ التابع الخاصتين التاليتين:

$$1) \qquad 0 \le f_{x(X)} \le 1$$

$$2) \qquad \sum_x f_{x(X)} = \sum_x P(X = x) = 1$$

في حالة عدم توفر أي خاصية من هاتين الخاصيتين لا يمكن أن نقول أننا أمام تابع الكتلة الاحتمالية أو ما يسمى دالة الكثافة.

وتأخذ دالة الكثافة للمتغير المتقطع الشكل التالي إذا عبرنا عنه بالجدول:

X	$x_1 \qquad x_2 \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots . . x_n$
$P(X = x)$	$P(X = 1) \qquad P(X = 2) \quad \dots \dots \dots \dots \dots . . P(X = n)$

مثال (تكملة المثال السابق):

ألقيت قطعت نقود متزنة ثلاث مرات، أوجد القيم الممكنة للمتغيرات العشوائية التالية:

أ) X عدد مرات ظهور الصورة,

ب) Y مربع عدد مرات ظهور الصورة,

أ) Z الفرق بين عدد مرات ظهور الصورة عدد مرات ظهور الكتابة.

أوجد مايلي:

$$P(X).\quad P(Y)\quad P(Z)$$

يجب أن تعلم ان أي خطأ في تقدير قيم المتغير العشوائي معناه خطأ في حساب تابع التوزيع ونحن بالنسبة لهذا المثال كنا قدحددنا قيم المتغير العشوائي وفصلنا فيها حتى يفهمها الطالب

حساب تابع التوزيع $P(X)$ في المثال السابق:

نقصد بـ $P(X)$ هو قيمة الاحتمال عند كل قيم المتغيرالعشوائي X التي حددناها سابقا

$$X(s)=\{0.1.2.3\}$$

فراغ العينة S	HHH	HHT	HTH	THH	HTT	THT	TTH	TTT	$\sum_x P(X=x)$
	3	2	2	2	1	1	1	0	
X	3	2			1			0	
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$			$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$			$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1$
	درسنا سابقا أن الاحتمال يساوي عدد الحالات الممكنة مقسوما على الحالات الكلية حيث نلاحظ أن عدد الحالات الكلية يساوي 8								أذا وجدنا أن المجموع لا يساوي واحد فهناك خطأ

ويمكن تلخيص هذا الجدول بيانيا كما يلي:

$P(X=3)$معناه هنا ماهو احتمال أن تظهرلدينا ثلاث صور وبما أن حالات ظهورثلاث صورهي حالة واحدة $\{HHH\}$ وبما أن الحالات الكلية هي ثمانية

$$S=\{HHH.HHT.HTH.THH.HTT.THT.TTH.TTT\}$$

وبالتالي فإن: $P(X=3)=\frac{\text{الحالات الممكنة}}{\text{الحالات الكلية}}=\frac{1}{8}$

$P(X=2)$ معناه ماهو احتمال أن تظهر لدينا صورتين وبما أن عدد حالات ظهور صورتين هو ثلاث حالات $\{.HHT.HTH.THH\}$ والحالات الكلية تساوي ثمانية 8

وبالتالي فإن: $P(X=2)=\frac{\text{الحالات الممكنة}}{\text{الحالات الكلية}}=\frac{3}{8}$

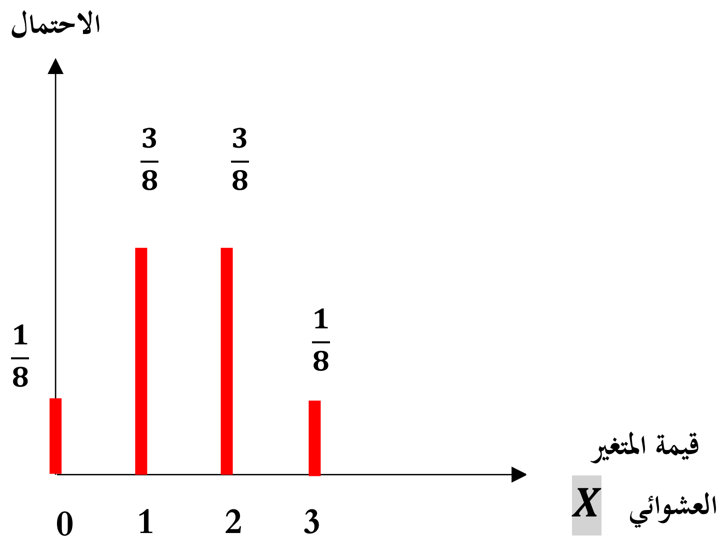
$P(X=1)$ معناه ماهو احتمال أن تظهر لدينا صورة واحدة وبما أن عدد حالات ظهور صورة واحدة هو ثلاث حالات $\{HTT.THT.TTH\}$ والحالات الكلية تساوي ثمانية 8

وبالتالي فإن: $P(X=1)=\frac{\text{الحالات الممكنة}}{\text{الحالات الكلية}}=\frac{3}{8}$

$P(X=0)$ معناه ماهو احتمال أن لا تظهر لدينا أي صورة وبما أن عدد حالات عدم ظهور أي صورة هو حالة واحدة $\{.TTT\}$ والحالات الكلية تساوي ثمانية 8

وبالتالي فإن: $P(X=0)=\frac{\text{الحالات الممكنة}}{\text{الحالات الكلية}}=\frac{1}{8}$

ويمكن التعبير عن تابع التوزيع بالرسم البياني كما يلي:



حساب تابع التوزيع $P(Y)$ في المثال السابق:

نقصد بـ $P(Y)$ هو قيمة الاحتمال عند كل قيم المتغير العشوائي Y التي حددناها سابقا

$$y(s)=\{0^2.1^2.2^2.3^2\}=\{0.1.4.9\}$$

Y	0^2	1^2	2^2	3^2	$\sum_x P(Y=y)$
$P(Y=y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1$

أذا وجدنا أن المجموع لا يساوي واحد فهناك خطأ	درسنا سابقا أن الاحتمال يساوي عدد الحالات الممكنة مقسوما على الحالات الكلية حيث نلاحظ أن عدد الحالات الكلية يساوي 8	

ويمكن تلخيص هذا الجدول بيانيا كما يلي:

$P\left(y=3^2=9\right)$معناه هنا ليس ظهور تسعة صور وهو مستحيل في ثلاث رميات، بل المعنى هنى هو مربع عدد الصور التي تظهر ونحن ظهرت لدينا ثلاث صور وبالتالي مربعها هو تسعة ومن نحسب احتمال ظهو ثلاث صور ،وبما أن حالات ظهور ثلاث صور هي حالة واحدة $\{HHH\}$ وبما أن الحالات الكلية هي ثمانية

$$S=\{HHH.HHT.HTH.THH.HTT.THT.TTH.TTT\}$$

وبالتالي فإن: $P\left(y=3^2=9\right)=\frac{\text{الحالات الممكنة}}{\text{الحالات الكلية}}=\frac{1}{8}$

$P\left(y=2^2=4\right)$ معناه هنا ليس ظهور أربع صور وهو مستحيل في ثلاث رميات، بل المعنى هنا هو مربع عدد الصور التي تظهر ونحن ظهرت لدينا صورتين وبالتالي مربعها هو أربعة ومن ثم نحسب احتمال ظهو صورتين ،

وبالتالي فإن: $P\left(y=2^2=4\right)=\frac{\text{الحالات الممكنة}}{\text{الحالات الكلية}}=\frac{3}{8}$

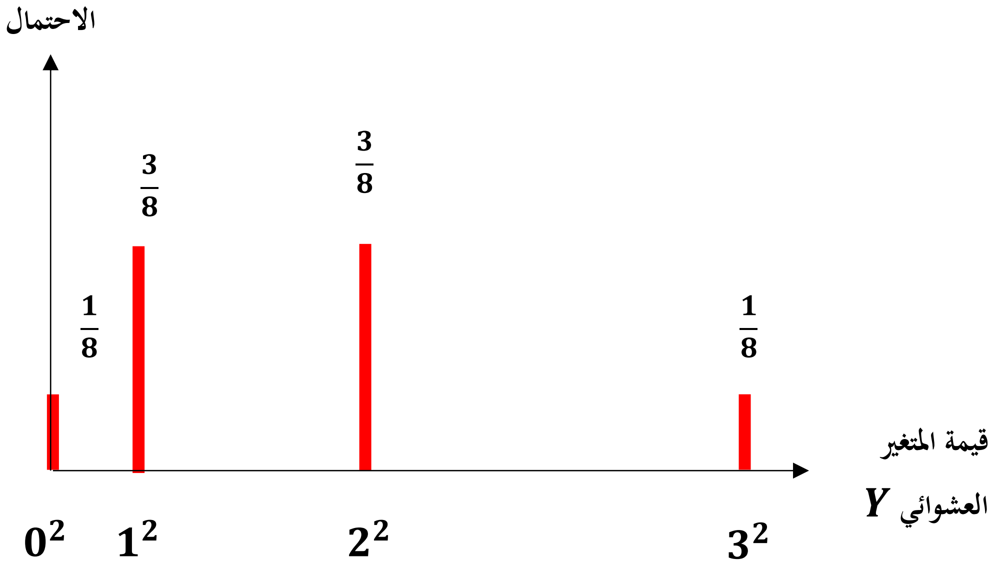
$P\left(y=1^2=1\right)$ معناه ماهو احتمال أن تظهر لدينا صورة واحدة وبما أن عدد حالات ظهور صورة واحدة هو ثلاث حالات $\{HTT.THT.TTH\}$ والحالات الكلية تساوي ثمانية 8

وبالتالي فإن: $P(X=1)=\frac{\text{الحالات الممكنة}}{\text{الحالات الكلية}}=\frac{3}{8}$

$P\left(y=0^2=0\right)$ معناه ماهو احتمال أن لا تظهر لدينا أي صورة وبما أن عدد حالات عدم ظهور أي صورة هو حالة واحدة $\{TTT.\}$ والحالات الكلية تساوي ثمانية 8

وبالتالي فإن: $P\left(y=0^2=0\right)=\frac{\text{الحالات الممكنة}}{\text{الحالات الكلية}}=\frac{1}{8}$

ويمكن التعبير عن تابع التوزيع $P(y)$بالرسم البياني كما يلي:



حساب تابع التوزيع $P(z)$ في المثال السابق:

حسب تعريف المتغير العشوائي Z الذي يعرف المتغير العشوائي Z بأنه طرح عدد مرات ظهور الصورة من عدد مرات ظهور الصورة

من خلال طرح عدد مرات ظهور الصورة من عدد مرات ظهور الصورة نجد أن قيم $Z(s)$ هي:

$$Z(.TTT) = 0 - 3 = -3$$

$$Z(HTT) = 1 - 2 = -1 .\ Z(THT) = 1 - 2 = -1 \quad Z(TTH) = 1 - 2 = 1$$

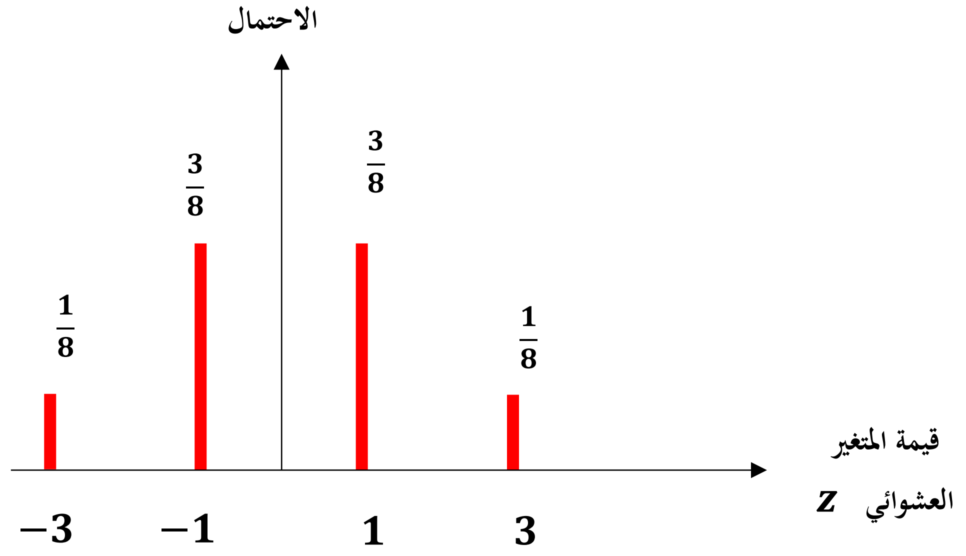
$$Z(HHT) = 2 - 1 = 1 .\ Z(HTH) = 2 - 1 = 1 \quad Z(THH) = 2 - 1 = 1$$

$$Z(HHH) = 3 - 0 = 3$$

$$Z(s) = \{3.1.-1.-3\}$$

Z	-3	-1	1	3	$\sum_x P(Y=y)$
$P(Z=z)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1$
	درسنا سابقا أن الاحتمال يساوي عدد الحالات الممكنة مقسوما على الحالات الكلية حيث نلاحظ أن عدد الحالات الكلية يساوي 8				أذا وجدنا أن المجموع لا يساوي واحد فهناك خطأ

ويمكن التعبير عن تابع التوزيع $P(z)$ بالرسم البياني كما يلي:



دالة التوزيع
Cumulative Distribution Function

نعرف تابع التوزيع التراكمي $F_{X(x)}$ (اختصارا $F(x)$) لمتغير عشوائي X له تابع التوزيع الاحتمالي كما يلي:

$$F_{X(x)} = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f_{X(t)} \; ; \quad x \in R$$

وللتوضيح أكثر فان دالة التوزيع هي القيم التراكمية لقيم تابع التوزيع أي كل قيمة نجمعها مع التي تليها ثم نجمع المجموع مع الذي يليه وفي القيمة الأخيرة نجد أن دالة التوزيع تساوي الواحد

الفرق في رمز تابع التوزيع ودالة التوزع هو أن حرف
f تكتب صغيرة عندما نقصد تابع التوزيع
F تكتب كبيرة عندما نقصد دالة التوزيع

حساب دالة التوزيع $F(x)$ في المثال السابق:

نقصد بـ $F(X)$ هو القيمة التراكمية

لتابع التوزيع $f_{x(X)} = P(X = x)$

حساب دالة التوزيع يعتمد على صحة تابع التوزيع فان كانت صحيحة صح حسابك لدالة التوزيع والعكس

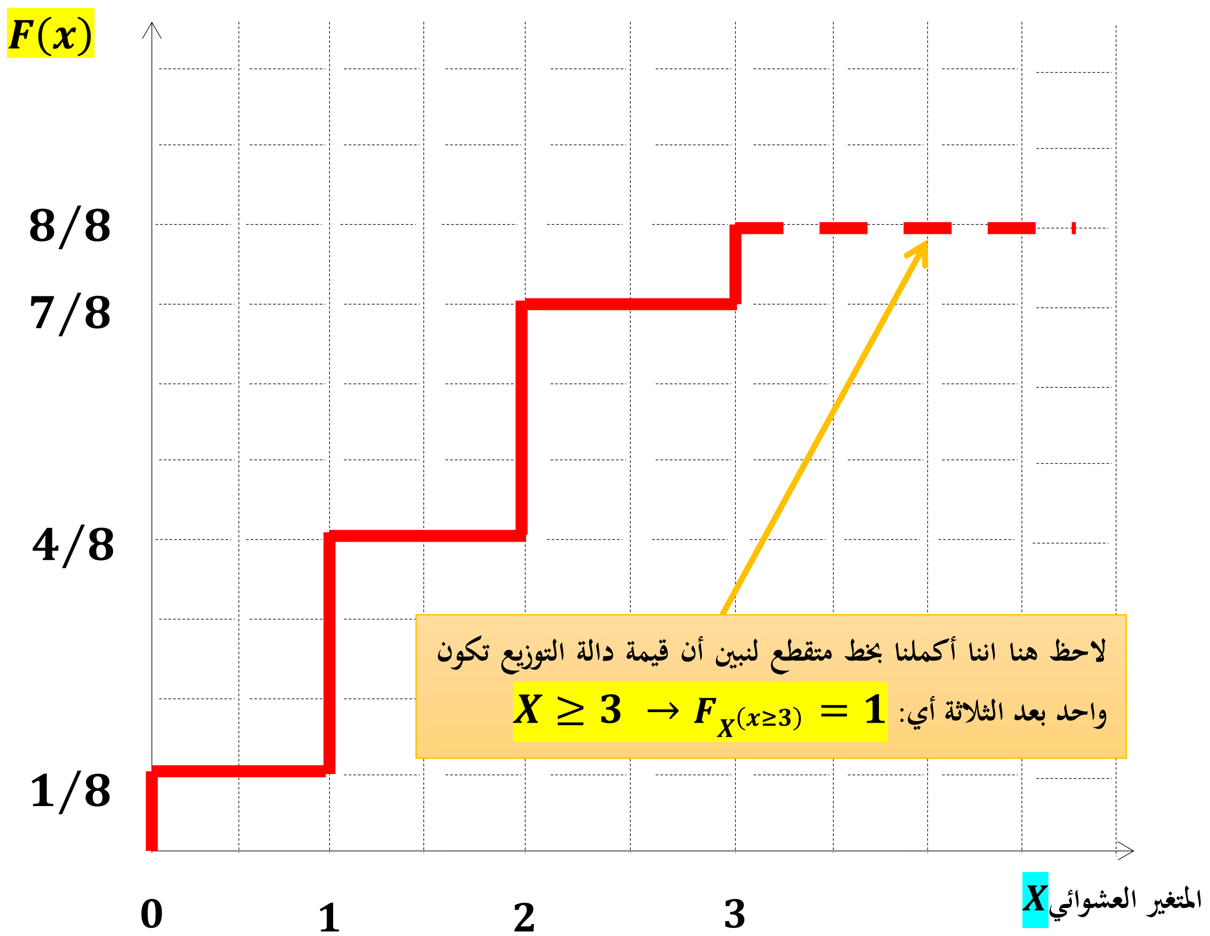
X	0	1	2	3	$\sum_x P(Y = y)$
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$F(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1$	
	لاحظ أن كل قيمة لدالة التوزيع عبارة عن مجموع قيم تابع التوزيع التي سبقتها				إذا وجدنا أن المجموع لا يساوي واحد فهناك خطأ

ويمكن أن نعبر عن دالة التوزيع كما يلي:

$$
F(X)\begin{cases}
F_{X(x)} = P(X \le x) \\
F_{X(0)} = P(X \le 0) = P(X = 0) = \dfrac{1}{8} \\
F_{X(1)} = P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \dfrac{4}{8} \\
F_{X(2)} = P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \dfrac{7}{8} \\
F_{X(3)} = P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 1) + P(X = 3) = \dfrac{8}{8}
\end{cases}
$$

بالنسبة للطالب التعبير عن دالة التوزيع في الجدول يكون أسهل

ويمكن التعبير عن دالة التوزيع $F(x)$ بيانيا كما يلي:



تساؤل:

قد يسأل الطالب هنا ما هو الفرق بين دالة التويع وتابع التوزيع:

تابع التوزيع يعطينا الاحتمال عند نقطة معينة أما دالة التوزيع فتعطينا الاحتمال عند مجال

مثلا لو طلب من حساب $F_{X(1)}$ $F_{X(10)}$ $F_{X(-1)}$

حتى يسهل علينا حساب $F_{X(1)}$ $F_{X(10)}$ $F_{X(-1)}$ يمكننا أن نستعين بالرسم التالي:

$F_{X(10)}$ تنتمي إلى هذا مجال وبالتالي:

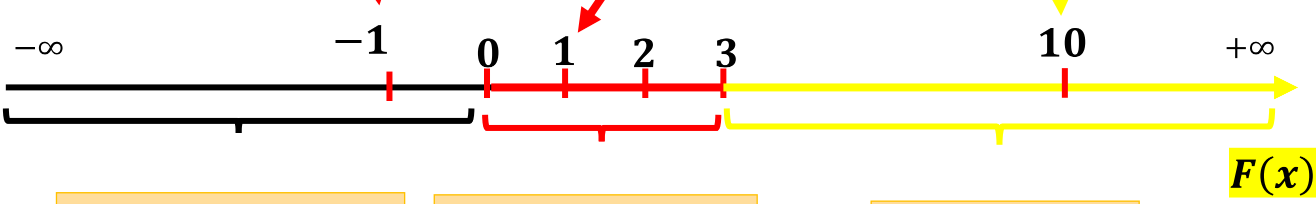
$F_{X(10)} = 1$

$F_{X(1)}$ تنتمي إلى هذا مجال وبالتالي من خلال الجدول السابق نجد أنها:

$F_{X(1)} = \frac{4}{8}$

$F_{X(-1)}$ تنتمي إلى هذا مجال وبالتالي:

$F_{X(-1)} = 0$



قيمة دالة التوزيع تكون واحد بعد الثلاثة أي: $F(x \geq 3) = 1$

في هذا المجال قيمة دالة التوزيع تساوي الواحد $F(0 \leq x \leq 3) = 1$

قيمة دالة التوزيع تكون الصفر من ناقص مالانهاية إلى صفر أي: $F(x < 3) = 0$

حساب دالة التوزيع $F(y)$ في المثال السابق:

بما أن تابع التوزيع تم حسابه سابق فان دالة التوزيع ستكون سهلة جدا

سوف نتبع نفس الخطوات التي قمنا بها في حساب دالة التويع للمتغير X

Y	0	1	4	9	$\sum_x P(Y=y)$
$P(Y=y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$F(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1$	
	لاحظ أن كل قيمة لدالة التوزيع عبارة عن مجموع قيم تابع التوزيع التي سبقتها				إذا وجدنا أن المجموع لا يساوي واحد فهنالك خطأ

لن نعبرعنها هنا بالرسم لأنه نفس الرسم لدالة التوزيع $F(x)$

حساب دالة التوزيع $F(z)$ في المثال السابق:

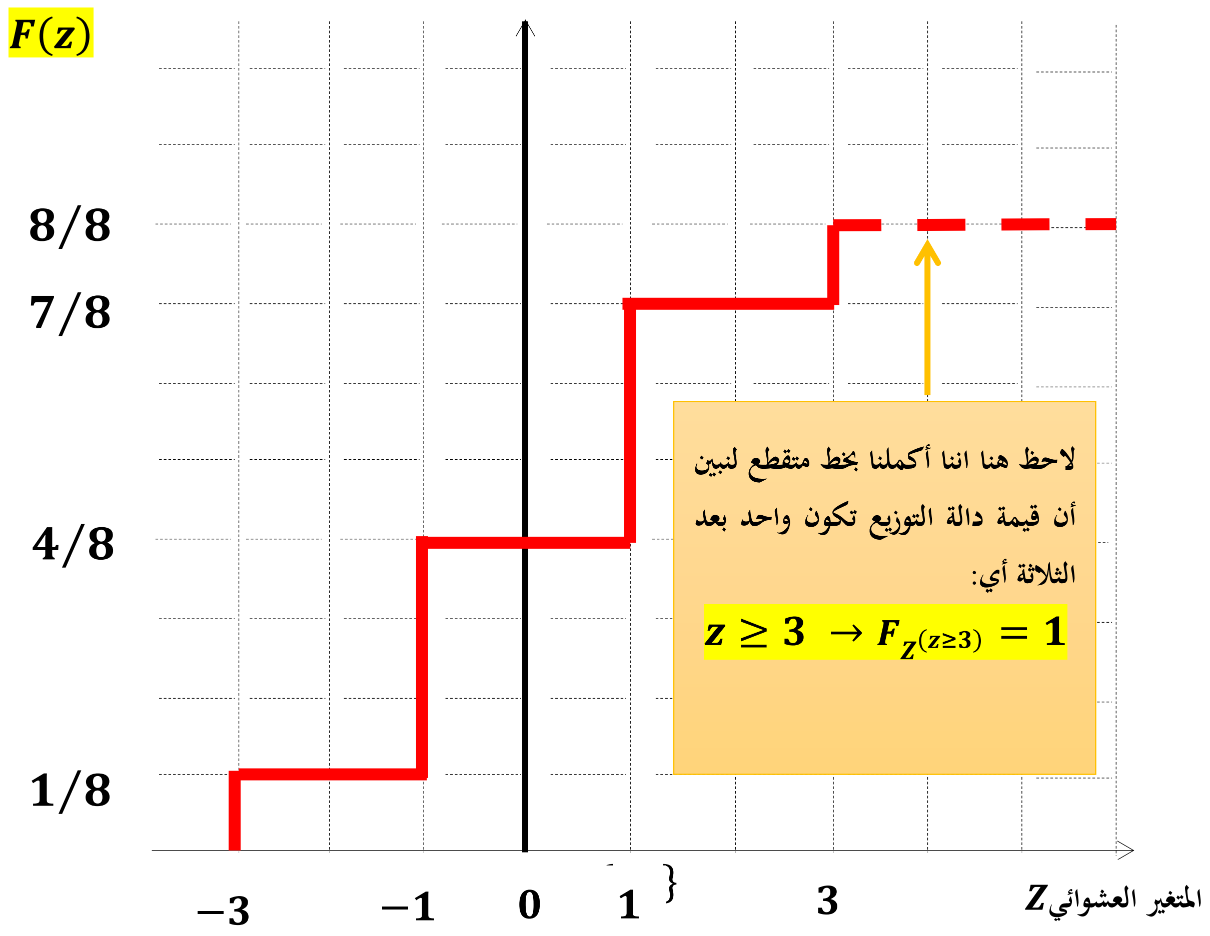
بما أن تابع التوزيع تم حسابه سابق فان دالة التوزيع ستكون سهلة جدا

Z	-3	-1	1	3	$\sum_x P(Y=y)$
$P(Z=z)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$F(z)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}+\frac{1}{8}=1$	

ويمكن أن نعبرعن دالة التوزيع كما يلي:

$$F(Z)\begin{cases} F_{Z(y)} = P(Z \leq y) \\ F_{Z(-3)} = P(Z \leq -3) = P(Z=-3) = \frac{1}{8} \\ F_{Z(-1)} = P(Z \leq -1) = P(Z=-3) + P(Z=-1) = \frac{4}{8} \\ F_{Z(0)} = P(Z \leq 2) = P(Z=-3) + P(Z=-1) + P(Z=0) = \frac{7}{8} \\ F_{Z(3)} = P(Z \leq 3) = P(Z=-3) + P(Z=-1) + P(Z=0) + P(Z=3) = \frac{8}{8} \end{cases}$$

ويمكن التعبيرعن دالة التوزيع $F(z)$ بيانيا كما يلي:



أحسب: $F_{Z(5)}$ $F_{Z(-5)}$ $F_{Z(-1)}$

حتى يسهل علينا حساب $F_{Z(5)}$ $F_{Z(-5)}$ $F_{Z(-1)}$ يمكننا أن نستعين بالرسم التالي:

$F_{Z(5)}$ تنتمي إلى هذا المجال وبالتالي:

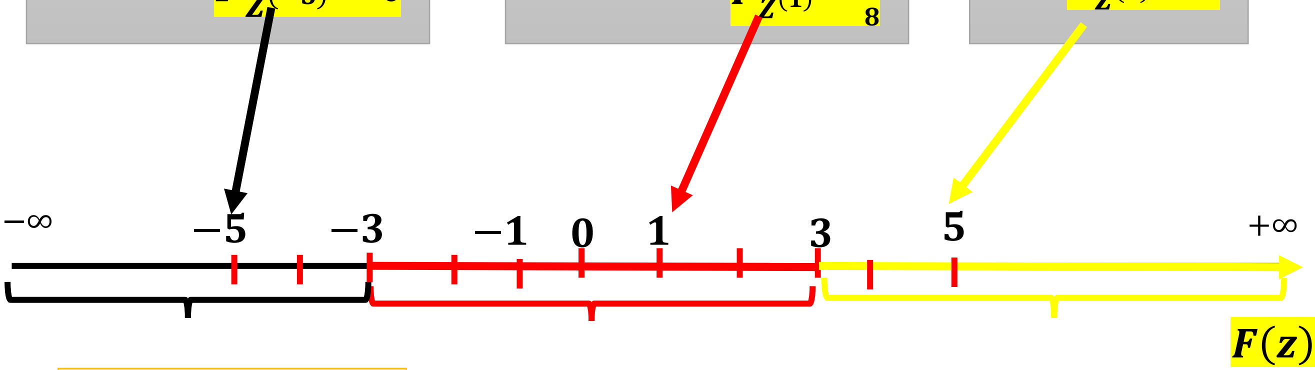
$$F_{Z(5)} = 1$$

$F_{Z(1)}$ تنتمي إلى هذا مجال وبالتالي من خلال الجدول السابق نجد أنها:

$$F_{Z(1)} = \frac{4}{8}$$

$F_{Z(-5)}$ تنتمي إلى هذا مجال وبالتالي:

$$F_{Z(-5)} = 0$$



قيمة دالة التوزيع تكون واحد بعد الثلاثة أي:

$$F(z \geq 3) = 1$$

في هذا المجال قيمة دالة التوزيع تساوي الواحد

$$F(-3 \leq z \leq 3) = 1$$

قيمة دالة التوزيع تكون الصفر من ناقص مالانهاية إلى صفر أي:

$$F(z < -3) = 0$$

التوقع الرياضي و الانحراف المعياري

Mathematical Expectation

التوقع الرياضي: يعرف التوقع الرياضي والقيمة المتوقعة على أساس أنه المتوسط المرجح لكل قيم المتغير العشوائي، حيث ترجح كل قيمة من المتغير باحتمالها فاذا كان X متغيرا عشوائيا له دالة توزيع فان التوقع أو القيمة المتوقعة للمتغير X والذي يرمزله بالرمز $E(X)$ ، ويعرف حسب العلاقة التالية:

$$E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots \dots \dots \dots x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

القيم المتوقعة لتوزيع احتمالي متقطع

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) = \mu_X$$

μ_X و $E(X)$ القيمة المتوقعة لـ X ، X قيم المتغير العشوائي ، إحتمال أن يأخذ المتغير العشوائي القيمة X

ملاحظة: نطلق على التوقع الرياضي أيضا الامل الرياضي أي ما نأمل الحصول عليه وهي نفس تفسير ما نتوقع الحصول عليه: كما ان التوقع الرياضي نقصد به القيمة المتوسطة وهو يقابل الوسط الحسابي في الاحصاء الوصفي ويمكن اثبات ذلك كما يلي:

نفرض أن لدينا احتمالات متساوية مثل القاء زهرة نرد متوازنة كل الارقام لها نفس الاحتمال أي:

$$P(x)=\frac{1}{n} \qquad \forall x\in\{x_1,x_1,x_1,\dots\dots\dots..x_n\}$$

$$\mu_X=E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip(x_i)=x_1\frac{1}{n}+x_2\frac{1}{n}+x_3\frac{1}{n}+\cdots\dots\dots.+x_n\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n}(x_1+x_3+x_3+\cdots\dots\dots.+x_n)$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

نلاحظ أن التوقع الرياضي يساوي $\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$ وهو هنا يمثل مجموع القيم مقسوما على عدد القيم وهو تعريف الوسط الحسابي الذي تم دراسته في الاحصاء الوصفي،

أليك بعض النظريات التي تساعدنا في حساب التوقع الرياضي:

توقع العدد الثابت هو نفسه أي:

نفرض c عدد ثابت فإن:

أولا:

$$a) \qquad E(c)=c$$

البرهان

$$E(c)=\sum_{i=1}^{n}cp(c)=c\sum_{i=1}^{n}p(c)$$

وبما أن مجموع الاحتمالات دائما يساوي الواحد فإن $\sum_{i=1}^{n}p(c)=1$

$$=c\sum_{i=1}^{n}p(c)=c$$

ثانيا:

$$b) \qquad E(cX)=cE(X)$$

البرهان

$$E(CX)=\sum_{i=1}^{n}Cx_ip(x_i)=Cx_1p(x_1)+Cx_2p(x_2)+\cdots\dots.+C\,x_np(x_n)$$

$$=c\left(x_1p(x_1)+x_2p(x_2)+\cdots\dots+x_np(x_n)\right)$$

$$= c\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) = cE(X)$$

إذا كان لدينا متغيرين عشوائيين فإن:

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

البرهان:

$$E(X \pm Y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \pm y_i) p(x_i \pm y_i) =$$

$$= \left(x_1 p(x_1) \pm y_1 p(y_1) \pm x_2 p(x_2) \pm y_2 p(y_2) \pm \cdots \ldots \pm x_n p(x_n) \pm y_n p(y_n)\right)$$

$$= \underbrace{\left(x_1 p(x_1) \pm x_2 p(x_2) \pm \cdots \pm x_n p(x_n)\right)}_{E(X)} \pm \underbrace{\left(y_1 p(y) \pm y_2 p(y_2) \pm \cdots \pm y_n p(y_n)\right)}_{E(Y)}$$

$$\underbrace{E(X) \qquad \pm \qquad E(Y)}$$

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

$$E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y)$$
$$E(X \pm a) = E(X) \pm a$$
$$E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$$
$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
$$E(aXY) = aE(X)E(Y)$$
$$E\big(E(X)\big) = E(X)$$

إذا كان X وY متغيرين عشوائيين مستقلين، فإن:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

البرهان:

بما أن المتغيرين مستقلين فإن $p(xy) = p(x)p(y)$

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) p(x_i y_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) p(x_i) p(y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) y_i p(y_i) = E(X)E(Y)$$

الانحراف المعياري: يقيس الانحراف المعياري الإنتشار أو التشتت لمجموعة من البيانات, وكذلك يقيس الانحراف المعياري إنتشار قيم المتغير العشوائي،

لحساب التباين والانحراف المعياري لتوزيع احتمالي متقطع

التباين يرمزله بـ $Var(X)$ ويساوي

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

الانحراف المعياري يرمزله بـ σ_X ويساوي

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E(X^2) - [E(X)]^2}$$

للتوضيح فإن $E(X^2)$ يحسب كما يلي:

$$E(X^2) = \sum^{n} {x_i}^2 p(x_i)$$

إذا كان متغيرا عشوائيا و c عدد ثابت فإن:

$$a) \qquad Var(c) = 0$$

البرهان

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \rightarrow Var(c) = E(c^2) - [E(c)]^2$$

$$E(c^2) = ؟$$

$$E(c^2) = \sum_{i=1}^{n} ccp(cc) = \sum_{i=1}^{n} ccp(c)p(c) = \sum_{i=1}^{n} [cp(c)][cp(c)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [cp(c)] \sum_{i=1}^{n} [cp(c)] = E(c)E(c) = [E(c)]^2$$

ملاحظة جد مهم يجب الانتباه عليها كي لا يخلط الطالب بين الثابت والمتغير

$E(c^2) = [E(c)]^2$ هذا في حالة الثابت c

$E(X^2) \neq [E(X)]^2$ هذا في حالة المتغير X

$$Var(c) = E(c^2) - [E(c)]^2 = 0$$

ثانيا:

$$b)\quad Var(cX) = c^2Var(X)$$

البرهان

البرهان

$$Var(cX) = c^2Var(X) \rightarrow Var(c) = E(cX^2) - [E(cX)]^2$$

لدينا حسب خواص الوقع أن: $E(cX) = cE(X)$

$$E(cX) = cE(X) \rightarrow [E(cX)]^2 = c^2[E(X)]^2$$

$$E((cX)^2) = E(c^2X^2) = c^2E(X^2) \rightarrow Var(cX) = c^2E(X^2) - c^2E(X^2)$$
$$= c^2[E(X^2) - E(X^2)] = c^2Var(X)$$

إذا كان X وY متغيرين عشوائيين مستقلين، فإن: $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$

$$Var(X - Y) = E((X-Y)^2) - [E(X-Y)]^2$$

$$E((X-Y)^2) = E(X^2 + Y^2 - XY)$$
$$= E((X)^2) + E((Y)^2) - 2E(XY)$$

$$= E((X)^2) + E((Y)^2) - 2E(XY) \qquad [E(X-Y)]^2 = [E(X) - E(Y)]^2$$
$$= [E(X)]^2 + [E(Y)]^2 - E(X)E(Y)$$

$$Var(X - Y) = E((X)^2) + E((Y)^2) - E(XY) - [[E(X)]^2 - [E(Y)]^2 - E(X)E(Y)]$$
$$= E((X)^2) + E((Y)^2) - \cancel{E(X)E(Y)} - [E(X)]^2 - [E(Y)]^2 + \cancel{E(X)E(Y)}$$
$$= E((X)^2) + E((Y)^2) - [E(X)]^2 - [E(Y)]^2$$
$$= \underbrace{E((X)^2) - [E(X)]^2}_{Var(X)} + \underbrace{E((Y)^2) - [E(Y)]^2}_{Var(Y)}$$

$$\underbrace{Var(X) + Var(Y)}$$

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y)$$

إذا كان X وY متغيرين عشوائيين مستقلين، فإن: $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$

$$Var(X+Y) = E((X+Y)^2) - [E(X+Y)]^2$$

$$E((X+Y)^2) = E(X^2 + Y^2 + 2XY)$$
$$= E((X)^2) + E((Y)^2) + 2E(XY)$$
$$= E((X)^2) + E((Y)^2) + 2E(X)E(Y)$$

$$[E(X+Y)]^2 = [E(X) + E(Y)]^2$$
$$= [E(X)]^2 + [E(Y)]^2 - 2E(X)E(Y)$$

$$Var(X+Y) = E((X)^2) + E((Y)^2) + 2E(XY) - [[E(X)]^2 + [E(Y)]^2 + 2E(X)E(Y)]$$
$$= E((X)^2) + E((Y)^2) + \cancel{2E(X)E(Y)} - [E(X)]^2 - [E(Y)]^2 - \cancel{2E(X)E(Y)}$$
$$= E((X)^2) + E((Y)^2) - [E(X)]^2 - [E(Y)]^2$$
$$= \underbrace{E((X)^2) - [E(X)]^2}_{Var(X)} + \underbrace{E((Y)^2) - [E(Y)]^2}_{Var(Y)}$$

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y)$$

بما أن:

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$
$$Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y)$$
$$\Rightarrow Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$$

مثال:

ليكن X متغير عشوائي القيم الاحتمالية له ممثلة في الجدول التالي:

X	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	α	$\frac{1}{8}$

أوجد كل من:

α

a) $E(X)$; b) $E((X)^2)$; c) $E(X+7)$; d) $E(X^2+3X)$

$e)\quad Var(X)\ ;\quad f)\ \ Var(6X-8)\ ;\ g)\quad Var(X^2-2);\ h)\quad Var(X)$

الحل:

باستخدام ما تم دراسته سابقا:

$$\sum_x P(X=x)\ =1\rightarrow P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$$

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\alpha+\frac{1}{8}=1\rightarrow \alpha+\frac{5}{8}=1\ \rightarrow \alpha=1-\frac{5}{8}$$

$$\alpha=\frac{3}{8}$$

ومنه:

X	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\alpha=\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

حساب التوقع الرياضي: $a)\quad E(X)$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

X^2	0	1	4	9	
X	0	1	2	3	المجموع
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$x_i p(x_i)$	$0\times\frac{1}{8}$	$1\times\frac{3}{8}$	$2\times\frac{3}{8}$	$3\times\frac{1}{8}$	$\frac{12}{8}$
$X^2{}_i p(X^2{}_i)$	$0\times\frac{1}{8}$	$1\times\frac{3}{8}$	$4\times\frac{3}{8}$	$9\times\frac{1}{8}$	$\frac{24}{8}$
$(X^2+3X)_i p(X_i)$	$(0^2+3\times 0)0$	$(1^2+3\times 1)\frac{12}{8}$	$(2^2+3\times 2)\frac{30}{8}$	$(3^2+3\times 3)\frac{18}{8}$	$\frac{60}{8}$

من خلال الجدول نجد:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)=\frac{12}{8}$$

أو

$$E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{12}{8}$$

حساب: $b)\ \ E((X)^2)$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n} X^2{}_i p(X^2{}_i)$$

من خلال الجدول نجد:

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}X^2{}_i p(X_i)=\frac{24}{8}$$

أو

$$E(X^2)=\ 0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+4\times\frac{3}{8}+9\times\frac{1}{8}\ =\frac{24}{8}$$

حساب: $c)\ \ E(X+7)$

حسب الخاصية التي درسناها:

$$E(X+a)=E(X)+a\rightarrow E(X+7)=E(X)+7\ =\frac{10}{8}+7=\frac{66}{8}$$

حساب: $d)\quad E(x^2+3x)$

حسب الخاصية التي درسناها:

$$E(x^2+3x)=E(x^2)+E(3x)=E(x^2)+3E(x)=\frac{24}{8}+3\left(\frac{12}{8}\right)=\frac{60}{8}$$

أو بطريقة أخري

$$E(x^2+3x)=\sum_{i=1}^{n}(x^2+3x)_i p(X_i)$$

$$=(0^2+3\times0)0+(1^2+3\times1)\frac{12}{8}+(2^2+3\times2)\frac{30}{8}+(3^2+3\times3)\frac{18}{8}$$

$$=\frac{60}{8}$$

e) حساب التباين: $e)\qquad Var(X)$

لدينا: $Var(X)=\sigma_X^2=E(X^2)-[E(X)]^2$

بما اننا سابقق وجدنا أن:

$$E(X^2)=\frac{24}{8}\ ;\quad E(X)=\frac{12}{8}\rightarrow[E(X)]^2\ =\frac{144}{64}\rightarrow Var(X)=\frac{24}{8}-\frac{144}{64}$$

$$Var(X)=\frac{432}{64}=6.75$$

f) حساب $f)\ \ Var(6X-8)$

حسب الخاصية التي درسناها:

$$Var(6X-8)=6^2Var(X)$$

$$Var(6X-8)=6^2(6.75)=243$$

مثال:

ليكن لدينا متغيرين عشوائيين لهما تابع التوزيع الاحتمالي المشترك كما هو مبين في الجدول التالي:

X/Y	$X=0$	$X=1$	$X=2$	المجموع
$Y=0$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{5}{14}$
$Y=1$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{15}{28}$
$Y=2$	$\frac{3}{28}$	0	0	$\frac{3}{28}$
المجموع	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$	1

في هذا المثال هل $E(XY) = E(X)E(Y)$ أو $E(XY) \neq$ ولماذا؟

الحل :

أولا حساب $E(XY)$

$$E(XY) = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xyf_{x;y}(x,y) = 0\times 0\times\left(\frac{3}{28}\right) + 0\times 1\times\left(\frac{9}{28}\right) + 0 \times 2\times\left(\frac{3}{28}\right) + 1\times 0\times\left(\frac{3}{14}\right) + 1\times 1\times\left(\frac{3}{14}\right) + 2\times 1\times(0) + 2\times 0\times\left(\frac{1}{28}\right) + 2\times 1\times(0) + 2\times 2\times(0)$$

$$= 1\times 1\times\left(\frac{3}{14}\right) = \frac{3}{14}$$

ثانيا: حساب $E(X)E(Y)$

$$E(y) = \sum_{x=0}^{2} yf_y(y) = 0\times\left(\frac{15}{28}\right) + 1\times\left(\frac{3}{7}\right) + 2\times\left(\frac{1}{28}\right) = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}$$

$$E(x) = \sum_{x=0}^{2} xf_x(x) = 0\times\left(\frac{5}{14}\right) + 1\times\left(\frac{15}{28}\right) + 2\times\left(\frac{3}{28}\right) = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$$

ومنه:

$$E(X)E(Y) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$$E(XY) \neq E(X)E(Y)$$
$$\frac{3}{14} \neq \frac{3}{8}$$

نلاحظ أن
$$E(XY) \neq E(X)E(Y)$$
وذلك لانهم غير مستقلان بل مرتبطان

المتغير العشوائي المستمر (المتصل)
Continuous Probability Distributions

المتغير العشوائي المستمر هو متغير عشوائي يمكن أن يأخذ عددا غير منتهيا . ويتحدد هذا المتغير العشوائي من خلال مجال معين قد يكون هذا المجال مفتوحًا أو شبه مفتوح أو مغلق، وقد تكون محددة أو غير محدودة. أي أن له قيم فترية مستمرة وليست متقطعة .. فمثلا عند قياس الوزن لمجموعة من الطلبة فهناك مجال محدد لكن قيمه ليست منتهية ولا يمكن عدها ، وتبين دالة توزيع المتغير العشوائي المستمر كيفية حساب القيم الاحتمالية والمعرفة على مجال القيم التي يأخذها هذا المتغير العشوائي.

وكما قلنا بأن قيم المتغير العشوائي المستمر لا حصر لها فإنه لا يمكننا تحديد احتمال كل نتيجة عن طريق جدول كما هو الحال بالنسبة للمتغير العشوائي المتقطع، بل يتم تقديم دالة جديدة تستخدم لحساب الاحتمالات. تسمى دالة كثافة

لنفرض أننا نهتم بدراسة أوزان مجموعة من الطلبة، من أجل أي قيمتين 52,5كلغ و70,5كلغ على سبيل المثال، فإنه يوجد عدد غير منته بين أقل وزن و أكثر وزن، كما أن اختيار طالب وزنه 70كلغ تماما أمر شبه مستحيل ويمكن القول بأن احتماله يساوي الصفر، إلا أن الامر يختلف إذا كنا نريد أن نبحث عن إحتمال اختيار طالب وزنه على الاقل 70كلغ وبما أنه لا يتجاوز 70,5كلغ فإنه سيتم في هذه الحالة التعامل مع مجال بدلا من التعامل مع نقاط أي أننا نقوم بحساب الاحتمال بالشكل: $P(a < X < b)$ ، $P(a < X)$ على سبيل المثال,

ملاحظة

الاحتمال في المتغير العشوائي يحسب لمجل معين ويون دائما يساوا الصف عند نقطة معية
$$P(X = a) = 0$$
فلا يمكن تحديد جدول احتمال في المتغير المتصل كما في المتغير المتقطع

ومع أن المتغير العشوائي مستمرا يمكن أن يكون أي عدد حقيقي؛ على المجال $X \in [a; b]$

2. شروط دالة كثافة الاحتمال

بفرض أن X متغير عشوائي متصل معرف على فضاء العينة S ولكن مجال تعريفه هو

حيث يمثل هذا المجال: $[-\infty; +\infty]$ $\qquad$ $f: [-\infty; +\infty] \to [0; 1]$

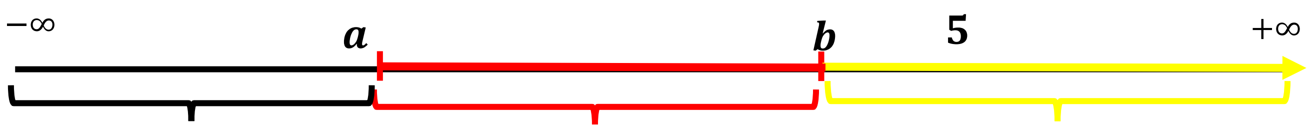
فإن هناك شرطان لتكون دالة التوزيع الاحتمالية المستمرة لـ $[-\infty; +\infty]$ دالة كثافة احتمال وهما:

$$\text{شروط دالة الكثافة} = \begin{cases} 1) \quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \\ 2) \quad f(x) \geq 0; \quad \forall_x \in [-\infty; +\infty] \to 1 \geq f(x) \geq 0 \end{cases}$$

ويمكن أن يأخذ المتغير العشوائي X فقيمة في الفترة $[a; b]$ فيعبر عنه:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

والمخطط التالي يوضح ما سبق



الدالة ليست معرفة في هذا المجال من $]b; +\infty[$ وبالتالي قيمة الاحتمال هنا تساوي الصفر $P(a < X < +\infty) = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = 0$	الدالة معرفة في هذا المجال أي أن أي قيمة للمتغير العشوائي داخل هذا المجال يقابلها قيمة احتمالية محصورة بين الصفر والواحد، وقيمة الاحتمال المحصور في هذا المجال تساوي الواحد $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx = 1$	الدالة ليست معرفة في هذا المجال من $]-\infty ; a]$ وبالتالي قيمة الاحتمال هنا تساوي الصفر $P(a < X < -\infty) = \int_a^{-\infty} f(x)\,dx = 0$

ملاحظة

وبما أن الاحتمال في حالة المتغير العشوائي المستمر يعبر عنه بالمساحة فإن:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

هنا يجب أنن ننوه إلى أن الطالب يحتاج إلى دراسة الدوال الأصلية والتكامل والا فلن يكون قادرا على دراسة هذا الفصل

مثال:

بين أن $f(x)$ يمثل دالة احتمالية للمتغير العشوائي X ثم احسب

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{9}x^2; & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ملاحظة نقصد بكلمة عدا ذلك أن عدا المجال المبين

$0 < x < 3$

فإن الاحتمال يساوي الصفر

أولا: $P(x \geq -3)$, $P(x \leq 7)$, $P(x = 3)$, $P(x = 1)$

ثانيا: $P(2 < X < 7)$ $\quad$ $P(1 < X < 3)$

ثالثا: أثبت أن $f(x)$ تمثل دالة كثافة

الحل:

قبل الحل هنا لابد أولا من تحديد المجال والتركيز معه لأنه إذ استبعد مجال السؤال من هذا المجال كانت النتيجة صفر

$$x \in [0, \quad 3]$$

أولا: حساب كل من:

: $P(x = 3)$, $P(x = 1)$

$P(x \geq -3)$, $P(x \leq 7)$

المخطط التالي يوضح كيف يتم حساب الاحتمال المحصور في مجال:

$x \geq -3$ تنتمي الى المجال التالي $[-3; +\infty[\rightarrow P(-3 < X < +\infty)$ وهذا المجال ينقسم إلى ثلاث مجالات كالتالي:

المجال الأول: $[-3; 0[$ وهذ المجال الدالة فيه ليست معرفة وبالتالي الاحتمال هنا يساوي الصفر

$$P(-3 < X < 0) = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx = 0$$

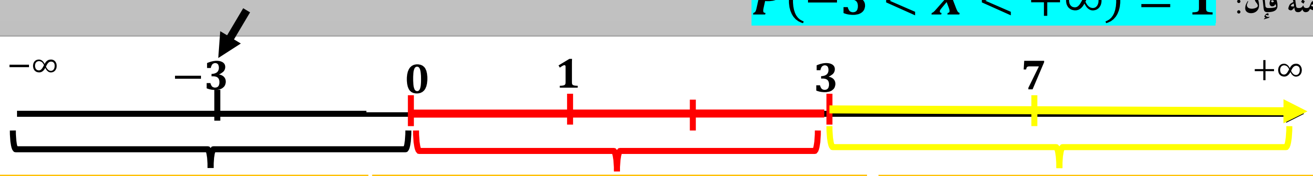
المجال الثاني: $[0, \quad 3]$ وهذا المجال هو مجال تعريف دالة الاحتمال وبالتالي فالاحتمال في هذا المجال يساوي الواحد

$$P(0 < X < 3) = \int_{0}^{3} \frac{1}{9}x^2\,dx = 1$$

المجال الثالث: $]3; +\infty[$ وهذ المجال الدالة فيه ليست معرفة وبالتالي الاحتمال هنا يساوي الصفر

$$P(3 < X < +\infty) = \int_{3}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$$

ومنه فإن: $P(-3 < X < +\infty) = 1$



الدالة ليست معرفة في هذا المجال من $]-\infty ; 0]$ وبالتالي قيمة الاحتمال هنا تساوي الصفر

$$P(-\infty < X < 0) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = 0$$

الدالة معرفة في هذا المجال أي أن أي قيمة للمتغير العشوائي داخل هذا المجال يقابلها قيمة احتمالية محصورة بين الصفر والثلاثة، وقيمة الاحتمال المحصور في هذا المجال تساوي الواحد

$$P(0 < X < 3) = \int_{0}^{3} \frac{1}{9}x^2\,dx = 1$$

الدالة ليست معرفة في هذا المجال من $]3; +\infty[$ وبالتالي قيمة الاحتمال هنا تساوي الصفر

$$P(3 < X < +\infty) = \int_{3}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$$

$$P(x=1)\ ,\quad P(x=3)$$

لاحظ أن المطلوب هنا هو حساب الاحتمال عند نقطة وقد بينا سابقا ان قيمة الاحتمال عند نقطة في المتغير المتص تكون دائما تساوي الصفر

ومنه فإن:

$$P(x=1)=0\ ,\quad P(x=3)=0$$

ثانيا: حساب كل من:

$$P(1<X<3) \qquad\qquad P(2<X<7)$$

بالنسبة لـ $P(1<X<3)$ نلاحظ أن مجال المتغير العشوائي ضمن المجال المعرف للدالة:

أي ان المطلوب هنا هو حياب الومساحة المحصورة بين واحد وثلاثة والمساحة كما تعرف عزيزي الطالب تحسب بايتخدام الدالة الاصلي في هذا المجال:

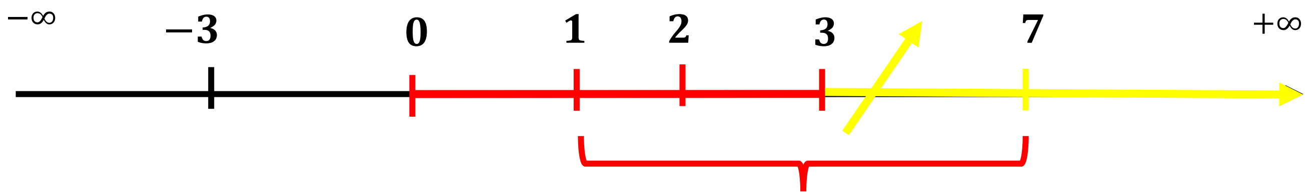
تذكير خاص بحساب الدوال الاصلية

$$\int_a^b x^n\,dx=\frac{1}{n}x^{n+1}\Big|_a^b \qquad \int_a^b \frac{1}{c}x^n\,dx=\frac{1}{cn}x^{n+1}\Big|_a^b$$

$$P(1<X<3)=\int_1^3\frac{1}{9}x^2d(x)=\frac{1}{27}x^3\Big|_1^3=\left(\frac{1}{27}3^3\right)-\left(\frac{1}{27}1^3\right)$$
$$=\left(\frac{27}{27}\right)-\left(\frac{1}{27}\right)=\frac{26}{27}$$

بالنسبة لـ $P(2<X<7)$ نلاحظ أن مجال المتغير العشوائي ضمن مجالين كما يلي:

الاحتمال هنا 0



نلاحظ أن المتغير العشوائي $2<X<7$ الى مجالين أحدهما معرف وهو $2<X<3$ والاخر غير معرف وهو $3<X<7$

$$P(2<X<7)=\int_{2}^{3}\frac{1}{9}x^2d(x)+\underbrace{\int_{3}^{7}f(x)d(x)}_{0}=\int_{2}^{3}\frac{1}{9}x^2d(x)$$

$$P(2<X<7)=\int_{2}^{3}\frac{1}{9}x^2d(x)+\underbrace{\int_{3}^{7}f(x)d(x)}_{0}=\int_{2}^{3}\frac{1}{9}x^2d(x)=\frac{1}{27}x^3\Big|_2^3$$

$$=\left(\frac{1}{27}3^3\right)-\left(\frac{1}{27}2^3\right)=\left(\frac{9}{27}\right)-\left(\frac{4}{27}\right)=\frac{5}{27}$$

ثالثا: أثبات أن $f(x)$ تمثل دالة كثافة

كما قلنا سابقا أنه من شروط أن تكون $f(x)$ تابع كثافة فإن:

$$\text{شروط دالة الكثافة}=\begin{cases}1)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=1\\ 2)\quad f(x)\geq 0;\quad \forall_x\in\ [-\infty;+\infty]\rightarrow 1\geq f(x)\geq 0\end{cases}$$

الدالة غير معرفة 0 الدالة غير معرفة 0

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{3}\frac{1}{9}x^2\,dx+\int_{3}^{+\infty}f(x)\,dx=\frac{1}{27}x^3\Big|_0^3$$

$$=\left(\frac{1}{27}3^3\right)-\left(\frac{1}{27}0^3\right)=\left(\frac{27}{27}\right)-\left(\frac{0}{27}\right)=1$$

بما أن $\int_0^3 f(x)\,dx=1$ فان $f(x)$ دالة كثافة

تمرين:

بين أن $f(x)$ يمثل دالة احتمالية للمتغير العشوائي X وأحسب:

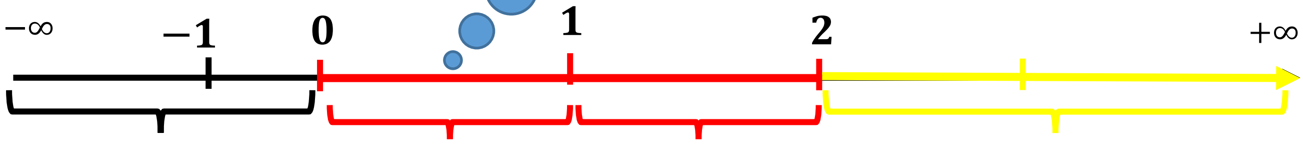
$f(x=-1)$, $f(x=0.5)$, $f(x=1.5)$, $f(x=9)$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{4}{5}x; & 0 < x \le 1 \\ \frac{2}{5}(3-x); & 1 < x \le 2 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

الحل:

من الملاحظ هنا ان المجال مقسوم الى قسمين ولكل قسم دالته الخاصة به

ملاحظة هدا الشكل الهدف منه توضيح مجالات تعريف
الدالة لان شكل الدالة يرسم في محورين ونجن لا نحتاج ان
نقوم بدارسة الدالة ورسمها فهوليس موضوعنا



الدالة ليست معرفة في هذا المجال من $]2 ; +\infty]$وبالتالي قيمة الاحتمال هنا تساوي الصفر	الدالة معرفة في هذا المجال بالدالة $f(x)=\frac{2}{5}(3-x)$	الدالة معرفة في هذا المجال بالدالة $f(x)=\frac{4}{5}x$	الدالة ليست معرفة في هذا المجال من $[0 ; -\infty[$وبالتالي قيمة الاحتمال هنا تساوي الصفر

إثبات أن $f(x)$ تمثل دالة كثافة

كما قلنا سابقا أنه من شروط أن تكون $f(x)$ تابع كثافة فإن:

$$\text{شروط دالة الكثافة} = \begin{cases} 1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \\ 2) \quad f(x) \ge 0; \quad \forall_x \in [-\infty; +\infty] \to 1 \ge f(x) \ge 0 \end{cases}$$

الدالة غير معرفة **0**   الدالة غير معرفة **0**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} \frac{4}{5}x\,dx + \int_{1}^{2} \frac{2}{5}(3-x)\,dx + \int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{4}{5}x\,dx + \int_{1}^{2} \frac{2}{5}(3-x)\,dx = \frac{2}{5}x^2\Big|_0^1 + \left(\frac{6}{5}x + \frac{1}{5}x^2\Big|_1^2\right)$$

$$= \left[\frac{2}{5}1 - \frac{2}{5}0\right] + \left[\left(\frac{6}{5}2 - \frac{1}{5}2^2\right) - \left(\frac{6}{5}1 - \frac{1}{5}1^2\right)\right] = \left[\frac{2}{5}\right] + \left[\frac{3}{5}\right] = 1$$

ثانيا: حساب

$$P(0.5 < X < 1.5) \qquad\qquad P(1 < X < 4)$$

حساب: $P(1 < X < 4)$

دائما قبل حساب أي مجال لابد
من الرجوع إلى المجال الذي

$1 < X < 4$ تنتمي الى المجال التالي $[1,\ \ 4] \rightarrow P(1 < X < 4)$ وهذا المجال ينقسم إلى مجالين كالتالي:

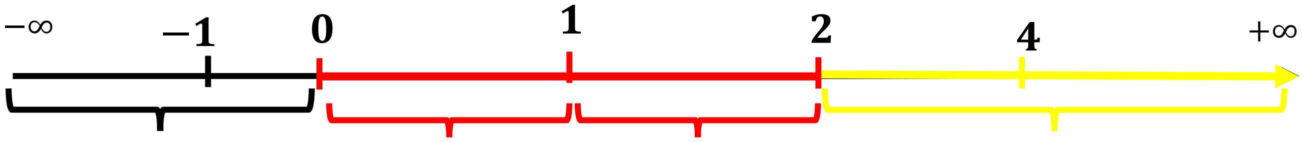
المجال الأول: $[1,\ \ 2]$ والدالة في هذا المجال هي: $f(x) = \frac{2}{5}(3-x)$ وبالتالي

$$P(1 < X < 2) = \int_{1}^{2} \frac{2}{5}(3-x)\,dx = \left(\frac{6}{5}x + \frac{1}{5}x^2\Big|_1^2\right) = \left[\left(\frac{6}{5}2 - \frac{1}{5}2^2\right) - \left(\frac{6}{5}1 - \frac{1}{5}1^2\right)\right] = \left[\frac{3}{5}\right]$$

المجال الثاني: $]2,\ \ 4[$ الدالة ليست معرفة هنا وبالتالي فهي تساوي الصفر

ومنه $P(1 < X < 4) = \frac{3}{5}$

ملاحظة جد مهمة: كما قلنا سابقا لا فرق بين المجال المفتوح والمغلق هنا



الدالة ليست معرفة في هذا المجال من $]2\ ;+\infty[$ وبالتالي قيمة الاحتمال هنا تساوي الصفر	الدالة معرفة في هذا المجال بالدالة $f(x) = \frac{2}{5}(3-x)$	الدالة معرفة في هذا المجال بالدالة $f(x) = \frac{4}{5}x$	الدالة ليست معرفة في هذا المجال من $]-\infty\ ;0[$ وبالتالي قيمة الاحتمال هنا تساوي الصفر

حساب: $P(0.5 < X < 1.5)$

$0.5 < X < 1.5$ تنتمي الى المجال التالي $[0,5, \quad 1,5] \rightarrow P(0,5 < X < 1,5)$ وهذا المجال ينقسم إلى مجالين كالتالي: $[0.5, \quad 1]\sim[1, \quad 1.5]$

المجال الأول: $[0.5, \quad 1]$ والدالة في هذا المجال هي: $f(x) = \frac{4}{5}x$ وبالتالي:

$$P(0,5 < X < 1) = \int_{0,5}^{1} \frac{4}{5}x\,dx = \frac{2}{5}x^2\Big|_0^1 = \left[\frac{2}{5}1 - \frac{2}{5}0,5\right] = \frac{2}{5}$$

المجال الثاني: $[1, \quad 1.5]$ والدالة في هذا المجال هي: $f(x) = \frac{2}{5}(3-x)$ وبالتالي:

$$P(1 < X < 1,5) = \int_{1}^{1,5} \frac{2}{5}(3-x)\,dx = \left(\frac{6}{5}x + \frac{1}{5}x^2\Big|_1^{1,5}\right) = \left[\left(\frac{6}{5}1,5 - \frac{1}{5}1,5^2\right) - \left(\frac{6}{5}1 - \frac{1}{5}1^2\right)\right] = \left[\frac{7}{20}\right]$$

ومنه $P(0,5 < X < 1,5) = \frac{2}{5} + \frac{7}{20} = \frac{15}{20}$

المتغير الاحتمالي التراكمي

Cumulative Distribution function (cdf)

بفرض أن X متغير عشوائي متصل معرف على فضاء عينة S مداه $[a, \quad b]$ ، وله اقتران كثافة احتمالية f ، نعرف التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X بأنه الاقتران F الذي يحقق:

$$F(X) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad -\infty < x < +\infty$$

وفي حالة كون اقتران الكثافة الاحتمالية بقاعدة واحدة يمكننا القول بأننا:

التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المتصل هو كالتالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le a \\ \int_a^x f(t)\,dt; & a < x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

وكنتائج مباشرة على هذا التعريف يمكن استنتاج ما يلي:

$$\begin{cases} 1)\ F(-\infty) = 0 \\ 2)\ F(+\infty) = F(b^+) = 1 \\ 3)\ f(x) = \dfrac{df(x)}{d(x)} \\ 4)\ P(c < X < b) = F(b) - F(c) \end{cases}$$

نقصد بـ b^+ النهاية اليمنى للاقتران التراكمي عند النقطة b

مثال:

اذا كان لدينا متغيرا عشوائيا وثابت وتمثل دالة كثافة

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{cx^2}{3} & -1 < X < 2 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

أولا:أوجد قيمة الثابت C

ثانيا: أوجد $F(x)$ ثم استعن به لحساب $P(0 < X < 2)$ $P(X \geq 2)$

الحل:

أولا:أوجد قيمة الثابت C

كما درسنا أنه حتى تكون الدالة دالة كثافة يجب توفرما يلي:

$$\text{شروط دالة الكثافة} = \begin{cases} 1)\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1 \\ 2)\quad f(x) \geq 0; \quad \forall_x \in\ [-\infty; +\infty] \to 1 \geq f(x) \geq 0 \end{cases}$$

وبالتالي لابد أن يكون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1 \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cx^2}{3} dx = 1$$

وبما أن $-1 < X < 2$ فإن حساب التكامل يكون حسب المجال الذي ينتمي له المتغير العشوائي

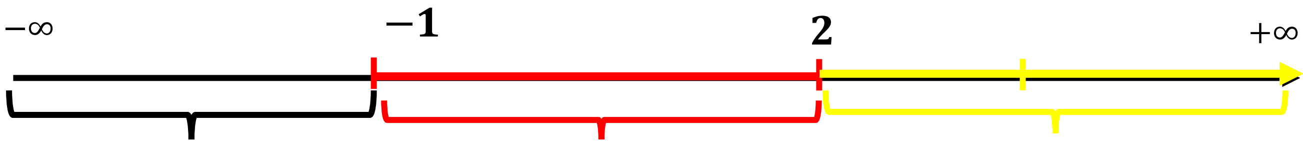
$$\int_{-1}^{2} \frac{cx^2}{3} dx = \frac{c}{9} x^3 \Big|_{-1}^{2} = \left[\left(\frac{c}{9} 8\right) - \left(\frac{c}{9} \times -1\right)\right] = \left[\frac{9c}{9}\right] = 1$$

ومنه فإن : $c = 1$ وبالتالي المعادلة كالتالي:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{3} & -1 < X < 2 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ثانيا: إيجاد $F(x)$

من خلال مجال تعريف التوزيع الاحتمالي نجد



الدالة ليست معرفة في هذا المجال ومنه فإن $F(x)$ تساوي الصفر

الدالة معرفة في هذا المجال ومنه

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$$

الدالة ليست معرفة في هذا المجال ومنه فإن $F(x)$ تساوي الصفر

$$F(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt}_{0} + \int_{-1}^{x} f(t)\,dt + \underbrace{\int_{x}^{\infty} f(t)\,dt}_{0}$$

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{x} \frac{t^2}{3}\,dt = \frac{t^3}{9}\Big|_{-1}^{x} = \left[\left(\frac{x^3}{9}\right) - \left(\frac{-1}{9}\right)\right] = \frac{x^3+1}{9}$$

ومنه فإن:

$$\boxed{F(x) = \frac{x^3+1}{9}}$$

وبالتالي فإن:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x \le -1 \\ \frac{x^3+1}{9} & a < x < b \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

استخدام $F(x)$ لحساب $P(0 < X < 2)$ $\quad$ $P(X \ge 2)$

$$P(0 < X < 2) = F(2) - F(0) = \frac{2^3+1}{9} - \frac{0^3+1}{9} = \frac{9}{9} - \frac{1}{9}$$

ومنه $P(0 < X < 2) = \frac{8}{9}$

$$P(X \ge 2) = F(2) = \frac{2^3+1}{9} = 1$$

التوقع الرياضي والتباين
Mathematical Expectation

التوقع الرياضي: إذا كان X متغير عشوائي متصل فإن القيمة المتوقعة $E(X)$ له تعطى حسب العلاقة التالية:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \mu$$

التباين: لحساب التباين والانحراف المعياري لتوزيع احتمالي مستمر

التباين يرمزله بـ $Var(X)$ ويساوي

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

الانحراف المعياري يرمزله بـ σ_X ويساوي

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E(X^2) - [E(X)]^2}$$

للتوضيح فإن $E(X^2)$ يحسب كما يلي:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$$

مثال:

إذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا يمثل الفترة الزمنية، مقيسة بالساعات، التي يعمل فيها جهاز حاسب آلي قبل الاصابة بعطل, وكانت دالة الكثافة للمتغير X ممثلة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} Ce^{\frac{-X}{100}} & X \geq 0 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد مايلي:

أ) أوجد قيمة الثابت C

ب) أوجد تابع التوزيع $F(x)$

ت) أوجد احتمال أن يعمل الحاسب الآلي في الفترة الزمنية بين 50 و150 ساعة قبل أن يتعطل

ث) أوجد احتمال أن يعمل الحاسب الالي لفترة زمنية أق من 100ساعة,

ج) أوجد متوسط عمل الحاسب الالي $E(X)$

ح) أوجد الانحراف والتباين للمتغير العشوائي X

الحل:

أولا: ايجاد قيمة الثابت C

بما أن الدالة تمثل تابع كثافة فإن:

$$\text{شروط دالة الكثافة} = \begin{cases} 1) & \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \\ 2) & f(x) \geq 0; \quad \forall_x \in [-\infty; +\infty] \to 1 \geq f(x) \geq 0 \end{cases}$$

تذكير خاص بحساب الدوال الاصلية للدالة الأسية

$$\int_a^b e^{nX}\,dx = \frac{1}{n} e^{nX}\Big|_a^b$$

أي أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ce^{\frac{-X}{100}}\,dx = 1 \to \int_{-\infty}^{0} Ce^{\frac{-X}{100}}\,dx + \int_{0}^{+\infty} Ce^{\frac{-X}{100}}\,dx = 0 + C\,(-100)e^{\frac{-X}{100}}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

$$C\,(-100)e^{\frac{-X}{100}}\Big|_0^{+\infty} = \left[C\,(-100)e^{\frac{-\infty}{100}}\right] - \left[C\,(-100)e^{\frac{0}{100}}\right] = 1$$

كما هو معروف أن أي عدد يرفع في الاس إلى ناقص ما لانهاية فإنه سؤول إلى الصفر

كما هو معروف أن أي عدد يرفع في الاس إلى الصفرفانه يساوي الواحد أي:

$$C\,(-100)e^{\frac{0}{100}} = C\,(-100)$$

$$-C\,(-100) = 1 \rightarrow C = \frac{1}{100}$$

ومنه:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} e^{\frac{-X}{100}} & X \geq 0 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ثانيا: أيجاد تابع التوزيع $F(x)$

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$F(X) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

$$F(X) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{100} e^{\frac{-t}{100}}\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{100} e^{\frac{-t}{100}}\,dt = 0 + -1e^{\frac{-t}{100}}\Big|_{0}^{x} =$$

$$-1e^{\frac{-t}{100}}\Big|_{0}^{x} = \left[-1e^{\frac{-x}{100}}\right] - \left[-1e^{\frac{0}{100}}\right] = -1e^{\frac{-x}{100}} + 1$$

ومنه فإن دالة التوزيع كالتالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -1e^{\frac{-x}{100}} + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

ثالثا: إيجاد احتمال أن يعمل الحاسب الآلي في الفترة الزمنية بين 50 و 150 ساعة قبل أن يتعطل

$$P(50 < X < 150) = F(150) - F(50) = \left[-1e^{\frac{-150}{100}} + 1\right] - \left[-1e^{\frac{-50}{100}} + 1\right]$$

$$= \left[-e^{\frac{-3}{2}} + 1\right] - \left[-e^{\frac{-1}{2}} + 1\right] = -e^{\frac{-3}{2}} + e^{\frac{-1}{2}} = 0.383$$

ومنه فإن: $P(50 < X < 150) = 0.383$

رابعا: إيجاد احتمال أن يعمل الحاسب الآلي لفترة زمنية أقل من 100ساعة

$$P(X < 100) = F(100) = \left[-1e^{\frac{-100}{100}} + 1\right] = 0,632$$

خامسا: إيجاد متوسط عمل الحاسب الآلي $E(X)$

تذكير خاص بحساب الدوال الاصلية للدالة الأسية

$$\int_a^b xe^{cx}\,dx = \frac{1}{c^2}e^{cX}(cx-1)\Big|_a^b$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \overbrace{\int_{-\infty}^{0} xf(x)\,dx}^{0} + \int_{0}^{+\infty} xf(x)\,dx = \overbrace{\int_{-\infty}^{0} x\frac{1}{100}e^{\frac{-X}{100}}\,dx}^{0} + \int_{0}^{+\infty} x\frac{1}{100}e^{\frac{-X}{100}}\,dx$$

$$= \frac{1}{100}\int_{0}^{+\infty} xe^{\frac{-X}{100}}\,dx = \frac{1}{\left(-\frac{1}{100}\right)^2}e^{-\frac{1}{100}X}\left(-\frac{1}{100}x-1\right)\Bigg|_0^{+\infty}\frac{1}{100}$$

$$= \left[\left[10000e^{-\frac{1}{100}+\infty}\left(-\frac{1}{100}+\infty-1\right)\right] - \left[10000e^{-\frac{1}{100}0}\left(-\frac{1}{100}0-1\right)\right]\right]\frac{1}{100}$$

$$= 0 - [-10000]\frac{1}{100}$$

$$E(X) = 100$$

سادسا: إيجاد $Var(X)$

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

تذكير خاص بحساب الدوال الاصلية للدالة الأسية

$$\int_a^b x^2e^{cx}\,dx = e^{cX}\left(\frac{x^2}{c} - \frac{2x}{c^2} + \frac{2}{c^3}\right)\Big|_a^b$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)\,dx = \overbrace{\int_{-\infty}^{0} x^2f(x)\,dx}^{0} + \int_{0}^{+\infty} x^2f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{100}\int_{0}^{+\infty} x^2e^{\frac{-X}{100}}\,dx = e^{\frac{-1}{100}x}\left(\frac{x^2}{\frac{-1}{100}} - \frac{2x}{\left(\frac{-1}{100}\right)^2} + \frac{2}{\left(\frac{-1}{100}\right)^3}\right)\Bigg|_0^{+\infty}\frac{1}{100}$$

$$= \left[\left[e^{\frac{-1}{100}\infty}\left(\frac{\infty^2}{\frac{-1}{100}} - \frac{2\infty}{\left(\frac{-1}{100}\right)^2} + \frac{2}{\left(\frac{-1}{100}\right)^3}\right)\right] - \left[e^{\frac{-1}{100}0}\left(\frac{0^2}{\frac{-1}{100}} - \frac{20}{\left(\frac{-1}{100}\right)^2} + \frac{2}{\left(\frac{-1}{100}\right)^3}\right)\right]\right]\frac{1}{100}$$

$$= 20000$$

$$E(X^2) = 20000$$

ومنه فإن:

$$Var(X) = 20000 - [100]^2 = 10000$$

وبتالي فإن الانحراف المعياري الذي يمثل جذر التباين فإن:

$$\sqrt{Var(X)} = \sigma_x = \sqrt{10000} = 100$$

التوزيعات الاحتمالية المنفصلة والمتصلة

سوف نستعرض في هذا القسم بعض التوزيعات الاحتمالية الهامة والتي لها دور كبير في وصف الظواهر الطبيعية في كل مجال مجال من مجالات البحث العلمي تقريبا، إذ إن بعض بعض هذه التوزيعات يخص الامتغير العشوائي المتقطع مثل التوزيع الثنائي وتوزيع بواسون، وبعضها الآخر يتعلق بمتغير عشوائي مستمر أهمها التوزيع الطبيعي.

تتميز هذه التوزيعات الاحتمالية بدوال كثافة مميزة والتي تكون تابعة لوسطاء متعلقة بالموضوع المدروس وستكون لهذه التوزيعات تطبيقات واسعة تساعد الباحث على استيعاب أفضل للمفاهيم التي تم دراستها سابقا،

التوزيعات الاحتمالية المنفصلة
The Discrete Probability Distributions

هناك عدة توزيعات متقطعة نظرية لها تطبيقات واسعة في صنع القرارات في عالم الشركات والاعمال، يدعى التوزيع الاحتمالي توزيعا نظريا عندما تستخدم الخواص الرياضية لمتغيره العشوائي في لإيجاد احتمالاته. تختلف مثل هذه التوزيعات عن التوزيعات التي يتم الحصول عليها بأسلوب شخصي أو من المشاهدات, وسوف نركز فقط على توزيعين مهمين هما التوزيع ذي الحدين الاحتمالي، والتوزيع البواسوني. وذلك لأهميتها واستخدامهما الواسع في الاقتصاد والتجارة.

اولا: التوزيع ذي الحدين الاحتمالي
The Binomial Distribution

ينسب بعض المؤرخين اول استخدام للتوزيع الثنائي الحدين الى جاكوب برنولي (*Jakob Bernoulli*) وهو عالم رياضيات سويسري بارز في القرن السابع عشر،

هو توزيع نظري يصف تجارب لها نتيجتين محتملتين فقط. هناك كثير من الاحداث ينطبق عليها هذا التوزيع. فعلى سبيل المثال: نظام ضبط الجودة في المصانع يصف أي سلعة يتم اختبارها على على أنها معيبة أو غير معيبة. وكذلك الأمر عند التفاوظ لابرام عقد فتكون النتيجة اما ابرام العقد أم لا:وكذلك الشراء اما نشتري أم لا، وكذلك عند اجتياز مسابقة توظيف ستكون النتيجة ننجح أم لا، وكذلك عند تقديم اقتراح لمديرك في العمل ستكون النتيجة المو افقة أم لا. وبهذا نلاحظ ان هناك دائما اجابتين أو بالاحرى نتيجتين فقط.

الشروط التي يجب أن يستوفيها التوزيع الاحتمالي الثنائي:

1) لكل محاولة نتيجتان ممكنتان: نجاح أو فشل.
2) هناك عدد ثابت من المحاولات المتماثلة في كل تجربة عددها **n**.
3) محاولات التجربة مستقلة بعضها عن بعض. وهذا يعني أنه إذا كانت نتيجة إحدى المحاولات " نجاحا "، فهذا لا يؤثر على احتمال أن تكون نتيجة محاولة أخرى، " نجاحا" أيضا.
4) يجب أن تكون العملية متلائمة مع توليد نتائج بعضها نجاح والاخر فشل. ويجب أن تكون القيمة المرتبطة باحتمال النجاح. "**p**" ثابتة في جميع محاولات التجربة.
5) إذا كانت "**p**" تمثل احتمال النجاح فيغن احتمال الفشل هو"**q**" حيث:

$$q = 1 - p$$

مثال:

شركة هاو سهولد سيكيورتي هي شركة تنتج وتركب 300 وحدة من وحدات الأمان المنزلية بحسب الطلب اسبوعيا. وقد تم تسعير هذه الوحدات بحيث يتضمن السعر خدمة تركيبها التي تنفذ من قبل اثنين من التنقنيين لمدة يوم واحد بالنسبة لوحدة التي تحوي مشكلة، سواء كانت مشكلة تصنيع أو مشكلة تصميم فإنه يتطلب تعديل الوحدة في موقع التركيب وينتج عن ذلك عملية تركيب تستغرق اكثر من يوم.

تفيد معلومات الدراسة الموسعة التي أنجزتها الشركة عن نظامها المتعلق بالتصنيع والتصميم أن 10 بالمائة من وحدات الامان التي تنتجها الشركة تحوي مشاكل مما يجعل تركيبها يستغرق أكثر من يوم. يمكن تطبيق التوزيع ذي الحدين على هذه الحالة وذلك لتوفر الشروط التالي:

1) **هناك نتيجتان فقط محتملتان عند تركيب الوحدة: إما أنها جيدة أو أنها معيبة ونعتبر الكشف عن وحدة معيبا نجاحا.**
2) **كل وحدة قد تم تصميمها وتصنيعها بنفس الطريقة.**
3) **أن نجد أن إحدى الوحدات سليمة أو معيبة أمر مستقل عن كون الوحدة السابقة سليمة أو معيبة.**
4) **احتمال أن تكون الوحدة معيبة $p = 0.10$ ثابت بالنسبة لكل وحدة.**
5) **احتمال أن تكون الوحدة سليمة $q = 1 - p = 0.90$ ثابت بالنسبة لكل وحدة.**

لايجاد سبب العيب (تصنيعي أو تصميمي)، أوجدت مجموعة ضمان الجودة في الشركة خطة تفكيك عينة عشوائية مؤلفة من أربع وحدات كل أسبوع، وبما أن حجم العينة 4 يعتبر صغيرا بالنسبة لحجم المجتمع

لنعتبر أن عدد الوحدات المعيبة هو المتغير العشوائي X المتقطع الذي يمكن أن يأخذ القيم:

$$p = 0.1.2.3.4$$

نفرض أن:

G يمثل الجيدة غير المعيبة واحتمال الحصول على وحدة جيدة هو $p(G) = 0.90$

D يمثل الوحدات المعيبة واحتمال الحصول على وحدة معيبة هو $p(D) = 0.10$

هناك أكثر من طريقة لحساب احتمال أن يأخذ المتغير أيا من القيم المتقطعة السابقة. ومن هذه الطرق أن مايلي:

وبما اننا افترضنا سابقا فرضية الاستقلالية لذلك يمكن استخدام قاعدة الضرب كما تطرقنا لذلك سابقا.

أولا: $x = 0$ معناه لا توجد وحدة معيبة أي كل الوحدات جيدة

$$p\left(G_{و}G_{و}G_{و}G\right) = p(G \cap G \cap G \cap G) = p(G)p(G)p(G)p(G) = (0.90)(0.90)(0.90)(0.90)$$
$$= (0.90)^4 = 0.6561$$

ثانيا: $x = 1$ يمكن ايجاد احتمال أن هناك وحدة واحدة معيبة من أصل أربع وحدات في العينة باستخدام قاعدة الضرب للأحداث المستقلة وقاعدة الجمع للأحداث المتنافية.

$$p(x=1) = p(D\cap G\cap G\cap G) + p(G\cap D\cap G\cap G) + p(G\cap G\cap D\cap G)$$
$$+p(G\cap G\cap G\cap D) = (0.90)^3(0.10) + (0.90)^3(0.10)$$
$$+(0.90)^3(0.10) + (0.90)^3(0.10) = 3(0.90)^3(0.10)$$
$$= 0.2916$$

ويمكن تلخيص ما سبق في الجدول التالي:

عدد الطرق C_n^x	عدد الوحدات المعيبة والسليمة	$q = 1-p$	النتائج
1 $C_4^0 = 1$	0 معيبة يقابله $(0.10)^0$ 4 سليمة $(0.90)^4$	$(0.90)^4(0.10)^0$ $1(q)^4(p)^0$	$GGGG$
4 $C_4^1 = 4$	1 معيبة يقابله $(0.10)^0$ 3سليمة $(0.90)^3$	$4(0.90)^3(0.10)^1$ $4(q)^3(p)^1$	$GGGD$ $GGDG$ $GDGG$ $DGGG$
6 $C_4^2 = 6$	2 معيبة يقابله $(0.10)^2$ 2 سليمة $(0.90)^2$	$6(0.90)^2(0.10)^2$ $6(q)^2(p)^2$	$GGDD$ $GDDG$ $DDGG$ $DGGD$ $GDGD$ $DGDG$
4 $C_4^3 = 4$	3 معيبة يقابله $(0.10)^3$ 1 سليمة $(0.90)^1$	$4(0.90)^1(0.10)^3$ $4(q)^3(p)^1$	$DDDG$ $DDGD$ $DGDD$ $GDDD$
1 $C_4^4 = 1$	4 معيبة يقابله $(0.10)^4$ 0 سليمة $(0.90)^0$	$1(0.90)^0(0.10)^4$ $1(q)^0(p)^4$	$DDDD$
من خلال المثال نلاحظ أن $p(x) = C_n^x(q)^{n-x}(p)^x$			

عندما تكون لدينا محاولات n ذات احتمال p نجاح في كل محاولة، يصبح احتمال نجاحات المتغير العشوائي X على النحو التالي:

معالم التوزيع الثنائي كالتالي:

n تمثل عدد المجاولات

p تمثل احتما نجاح كل محاولة وكما قلنا سابقا نفس الاحتمال لكل المحاولات وكل محاولة مستقلة عن باقي المحاولات

$$p(x) = C_n^x(p)^x(q)^{n-x}. \qquad x = 0; \dots\dots n$$

ويشار الى الاحتمال التراكمي للمتغير العشوائي X أو أصغر بالدلالة $F(x)$ وعندما يكـــون $x = x_0$ فإن:

$$F(x) = P(X \le x_0)$$

ويتم حساب متوسط المتغيروتباينه و انحر افه المعياري على النحو المبين ادناه:

المتوسط يرمزله بـ $E(X)$ أو μ_X ويساوي

$$E(X) = \mu_X = np$$

التباين يرمزله بـ $Var(X)$ ويساوي

$$Var(X) = \sigma_X^2 = np(1-p)$$

الانحراف المعياري يرمزله بـ σ_X ويساوي

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{np(1-p)}$$

كما يتم اشتقاق منوال المتغير $X.\tilde{\mu}$ على النحو التالي:

إذا لم يكن $p(1+n)$ عددا صحيحا: $\tilde{\mu}=$ الحد الأدنى لـ $[p(1+n)]$

إذا كـــان $p(1+n)$ عددا صحيحا: $\tilde{\mu}=$ 1 - $p(1+n)$ و $[p(1+n)]$

مثال:

إذا كان احتمال نجاح عملية جراحية هو **0.9** فاذا اجريت العملية لعشرة مرضى لهم نفس الظروف ونفس الاحتمال فاحسب ما يلي:

a) احتمال نجاح العملية لسبعة مرضى

b) احتمال نجاح العملية لجميع المرضى

c) احتمال نجاح العملية لسبعة مرضى على الاقل.

d) احتمال نجاح العملية لسبعة مرضى على الأكثر

e) متوسط عدد المرضى الذين سينجحون في العملية.

f) وتباين عدد المرضى الذين سيجرون العملية.

g) منوال عدد المرضى الذين سيجرون العملية.

الحل:

تحديد المعطيات

n=10 P=0.9 q=0.1

نلاحظ ان التوزيع هو توزيع ثنائي وبالتالي فإن:

$$p(x) = C_n^x (p)^x (q)^{n-x}$$

a) احتمال نجاح العملية لسبعة مرضى أي: $p(7)$

$$p(7) = C_{10}^7 (p)^7 (q)^{10-7}$$

$$p(7) = C_{10}^7 (0.9)^7 (0.1)^{10-7}$$

b) احتمال نجاح العملية لجميع المرضى أي: $p(10)$

$$p(10) = C_{10}^{10} (p)^{10} (q)^{10-10}$$

$$p(10) = C_{10}^{10}(0.9)^{10}(0.1)^{10-10}$$
$$p(10) = (0.9)^{10}$$

c) احتمال نجاح العملية لسبعة مرضى على الاقل. أي: أقل عدد للذين تنجح عمليتهم هو سبعة بمعنى من سبعة فما فوق بمعنى سبعة أو ثمانية أو تسعة أو عشرة وهنا نعبر عنها احصائيا كالتالي:

$$p(x \geq 7)$$

عزيزي الطالب لابد ان تفرق بين على الاقل وكلمة و اقل

مثلا لو كان هنا السؤال

احتمال نجاح العملية لسبعة مرضى و أقل هنا نقصد سبع أو ستة أو خمسة أو اربعة أو ثلاثة أو إثنين أو واحد أو صفر

$$p(x \leq 7) = p(7) + p(6) + p(5) + p(4) + p(3) + p(2) + p(1) + p(0)$$

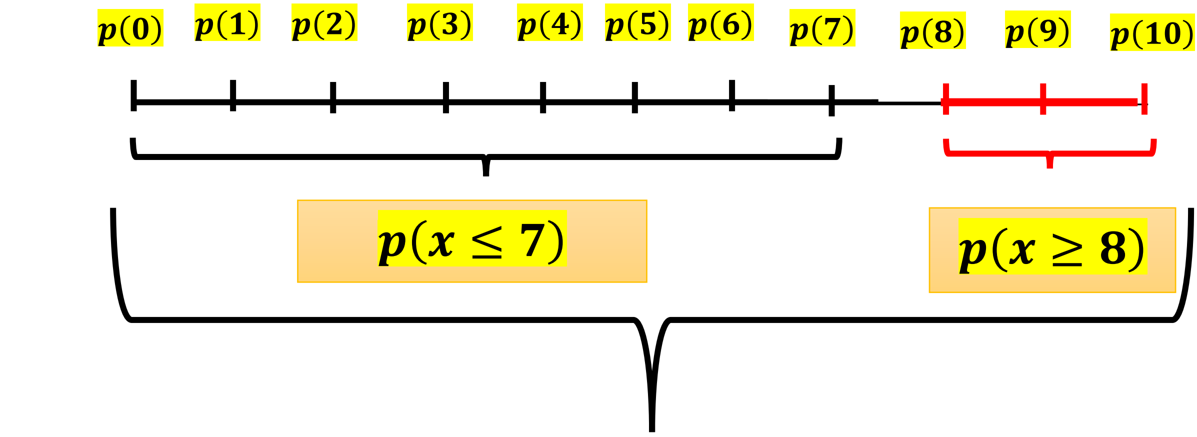
$$p(x \geq 7) = p(7) + p(8) + p(9) + p(10)$$
$$p(x \geq 7) = C_{10}^{7}(p)^{7}(q)^{10-7} + C_{10}^{8}(p)^{8}(q)^{10-8} + C_{10}^{9}(p)^{9}(q)^{10-9} + C_{10}^{10}(p)^{10}(q)^{10-10}$$
$$p(x \geq 7) = C_{10}^{7}(0.9)^{7}(0.1)^{10-7} + C_{10}^{8}(0.9)^{8}(0.1)^{10-8} + C_{10}^{9}(0.9)^{9}(0.1)^{10-9} + C_{10}^{10}(0.9)^{10}(0.1)^{10-10}$$

d) احتمال نجاح العملية لسبعة مرضى على الأكثر أي أكثر عدد للناجحين هو سبة وبالتالي من سبعة الى صفر بمعنى نجاح سبعة أو ستة أو خمسة أو أربعة أو ثلاثة أو إثنين أو واحد أو صفر. وهنا نعبر عنها احصائيا كالتالي:

$$p(x \leq 7) = p(7) + p(6) + p(5) + p(4) + p(3) + p(2) + p(1) + p(0)$$

أو

$$p(x \leq 7) = 1 - [p(8) + p(9) + p(10)]$$
$$p(x \leq 7) = 1 - p(x \geq 8)$$



$$p(x \leq 7) + p(x \geq 8) = 1 \rightarrow p(x \leq 7) = 1 - p(x \geq 8)$$

ومنه:

$$p(x \leq 7) = 1 - [C_{10}^{8}(p)^{8}(q)^{10-8} + C_{10}^{9}(p)^{9}(q)^{10-9} + C_{10}^{10}(p)^{10}(q)^{10-10}]$$

$$p(x \leq 7) = 1 - [C_{10}^{8}(0.9)^{8}(0.1)^{10-8} + C_{10}^{9}(0.9)^{9}(0.1)^{10-9} + C_{10}^{10}(0.9)^{10}(0.1)^{10-10}]$$

e) متوسط عدد المرضى الذين سينجحون في العملية. أي التوقع والذي يساوي:

$$E(X) = np$$
$$E(X) = 10 \times 0.9 = 9$$
$$E(X) = 9$$

f) تباين عدد المرضى الذين سيجرون العملية.أي:

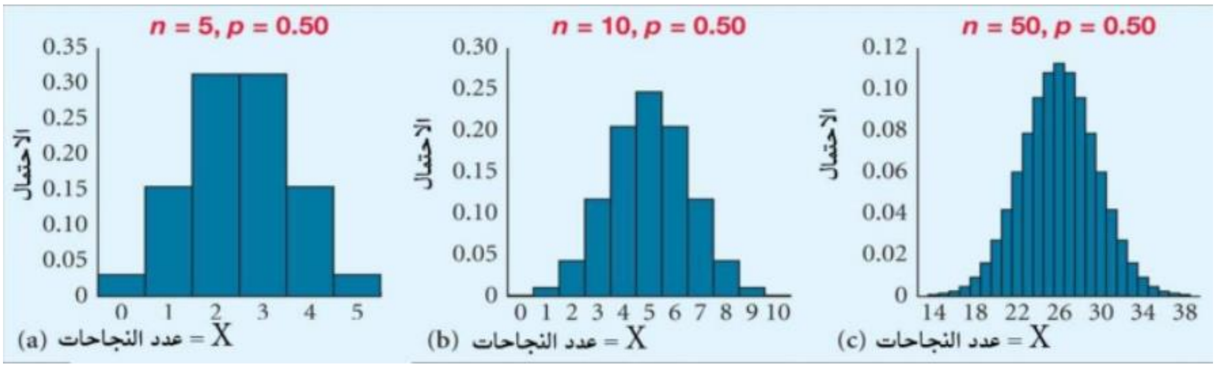
$$Var(X) = \sigma_X^2 = np(1-p)$$
$$Var(X) = \sigma_X^2 = 10 \times 0.9(1 - 0.9)$$
$$Var(X) = \sigma_X^2 = 0.9$$

g) منوال عدد المرضى الذين سيجرون العملية.

$$\tilde{\mu} = p(1+n) = 0.9(1+10) = 9.9 \cong 9$$

ملاحظات:

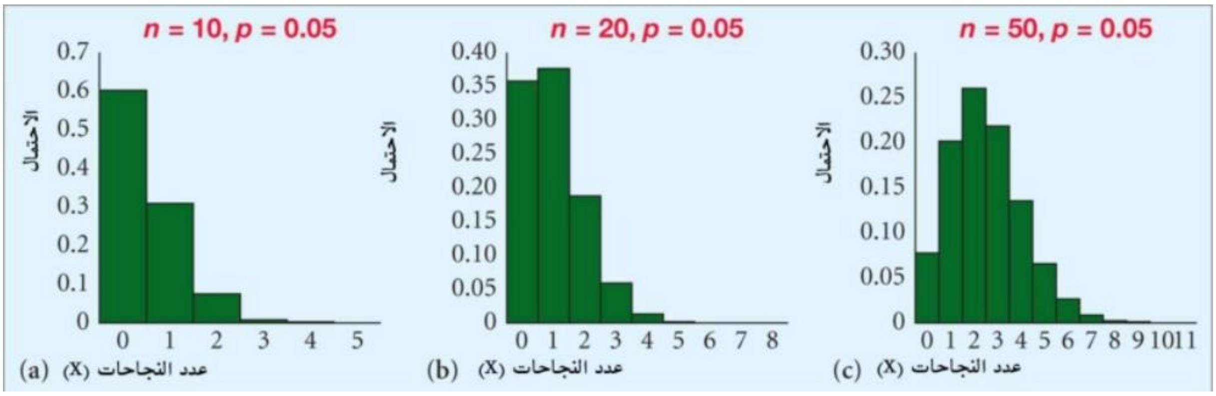
إذا كانت p قيمة النجاح تساوي 0.5 فإن التوزيع ذي الحدين يكون متماثلا كالتوزيع الطبيعي (بالنسبة التوزيع الطبيعي سيتم التطرق لع في التوزيعات المتصلة فيما يلي) والشكل التالي يبين ذالك:



يتبين من الشكل أعلاه التوزيع ذي الحدين لعينات مختلفة الاحجام مع ثبات متماثل بغض النظر عن حجم العينة

عندما تختلف قيمة p عن **0.5** في أي من الاتجاهين فإن التوزيع ذي الحدين يلتوي نحو اليمين (إذا كان $p < q$ يكون التوزيع ملتوي نحو اليمين ويسمى التواء موجب) أو نحو اليسار(إذا كان $p > q$ يكون التوزيع ملتوي نحو اليسار ويسمى التواء سالب) ويصبح الالتواء أشد كلما كان حجم العينة صغيرا وعندما تقترب قيمة p من **0** أو **1**

كما أن الالتواء يتضائل ويقترب من التوزيع الطبيعي كلما كبر حجم العينة (سيتم التطرق لتقريب التوزيع الثنائي الى توزيع طبيعي عند دراسة التوزيع الطبيعي) والشكل الموالي يبين ذلك:



ثانيا: التوزيع البواسوني
The Poisson Distribution

درسنا التوزيع ذي الحدين الذي يحتوي على حدثين حادث نجاح والاخر فشل، إلا أنه توجد العديد من الحالات يمكننا فقط تحديد حالات النجاح ولا يمكننا حساب عدد مرات الفشل. فعلى سبيل المثال مستشفى الامومة في قالمة يقدم خدمات الطوارئ لمرضى الكورونة، في هذه الحالة يمكننا بسهولة حساب عدد اتصالات حالات الطوارئ التي تستجيب لها الوحدات في الساعة. لكن التساؤل هنا كيف يمكن عد الاتصالات التي لم يتم تلقيها؟ من الواضح هنا أنه من الصعب بل من المستحيل معرفة عدد النتائج الممكنة (نجاح +فشل), فإذا كنا لا نستطيع حساب العدد الكلي للنتائج الممكنة عندئذ لا يمكن تطبيق التوزيع ذي الحدين ولكن في هذه الحالة قد نستطيع تطبيق توزيع بواسن.

<u>خصائص توزيع بواسون:</u> يصف توزيع بواسون عملية تمتد على مدى فترة من الزمن أو تتعلق بحيز محدد أو أي وحدة تحقق محددة بشكل جيد، تحدث النتائج الممكنة التي ندرسها مثل اتصالات الطوارئ وعدد الحفر بشكل عشوائي ونعد النتائج التي تحدث خلال شريحة معينة من الزمن من حيز ما. يمكن أن نعد عدد اتصالات الطوارئ خلال ساعة أو عدد الحفر لمسافات طولها ميلان من إحدى الطرقات. ونسمي هذه الأعداد نجاحات مع أنها قد تكون غير مرغوبة.

إن الأرقام التي يمكن عدها هنا (عدد النجاحات) هي : 0،1،3....

يتعامل هذا المتغير العشوائي مع حوادث نادرة الوقوع

قائمة المراجع

1.الاحصاء للاداريين والاقتصاديين، دلال القاضي، داروكتبة الحامد، عمان، 2005.

2. الاحصاء، محمود حسن المشهداني،بيت الحكمة جامعة بغداد، 1989

3. الاحصاء والاحتمالات نظرية وتطبيقات، حميد عويد مشرف العلكة، دارجامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية، 2019.

4. مدخل الى نظرية الاحتمالات الجزء الأول، ويليام فللر، ترجمة انيس اسماعيل كنجو، جامعة الملك سعود النشر العلمي والمطابع، المملكة العربية السعودية، 2000.

5. مبادئ الاحصاء والاحتمالات، عدنان بن ماجد عبد الرحمان بري، جامعة الملك سعود النشر العلمي والمطابع، المملكة العربية السعودية، 1997.

5. مبادئ في الاحتمالات والاحصاء، مبارك أسبرديب، جامعة تشرين، 2009.

6. مقدمة في نظرية الاحتمالات، جبارعبد مضحي، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان، 2011.

7. أساسيات الاحتمالات. خالد زهدي خواجة، المعهد العربي للتدريب والبحوث الاحصائية. الكويت. .2009

8. مبادئ الاحصاء والاحتمالات للعلوم الادارية والتطبيقية، محمد محمد المزاح، منشورات جامعة العلوم والتكنولوجيا، السودان، 2013.

9. الاحصاء في عالم الاعمال نهج صنع القرار الجزء الاول، ترجمة ماهر دريد بدوي، دار جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية،2015

10. الاحصاء في عالم الاعمال نهج صنع القرار الجزء الثاني، ترجمة ماهر دريد بدوي، دار جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية،2015