جامعة 08 ماي 1945 - قالمة
كلية العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم التجارية
التخصص : 3LMD مالية وتجارة دولية

السنة الدراسية : 2025 - 2026
التاريخ :2026/01/11
المدة: ساعتان

امتحان السداسي الأول في مقياس تحليل البيانات

التمرين الأول

1 - ما هي إشكالية الإحصاء الكلاسيكي مقارنة بتحليل البيانات؟

2 - ما هو جوهر طرق التحليل العاملي، وفيما تكمن أهمية التدوير في الفضاء؟

3 - أوجد نواة التطبيق الخطي f حيث:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \to f(x, y, z) = (x - y, x + z)$$

التمرين الثاني:

أ - لتكن مصفوفة البيانات التالية :

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

المطلوب: أوجد المصفوفة المركزة والمعيارية للمصفوفة X ثمّ أحسب مصفوفة الارتباطات؟

ب - نريد تطبيق طريقة ACP البسيطة على المصفوفة X ولنفرض أن مصفوفة التباين-التباين المشترك هي :

$$V = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1 - هل 6 و 7 و 3 تمثل قيم ذاتية للمصفوفة V، ثمّ حدد جدول القيم الذاتية وتحديد النسب المئوية للتباين المفسر؟

2 - أوجد الأشعة الذاتية المرافقة للقيم الذاتية الفعلية؟

3 - اوجد المركبات الأساسية F_α (احداثيات الأفراد على المحاور)؟

4 - احسب نسبة مساهمة الأفراد على المحاور؟

5 - احسب احداثيات المتغيرات على المحاور؟

التمرين الثالث:

لدينا متغيران X_1 : يمثل العلامة في تحليل البيانات X_2 : يمثل علامة التسويق

الفئة الأولى: (ناجح)

الطالب	X_1	X_2
1	80	75
2	85	70
3	66	92

الفئة الثانية: (راسب)

الطالب	X_1	X_2
1	50	46
2	45	60
3	61	50

المطلوب:

1- أوجد مصفوفة التباين-التباين المشترك في كل فئة ؟

2 - أوجد مصفوفة التباين المجمعة؟

3 - أوجد الدالة التمييزية، ثمّ صنف الملاحظة الجديدة $X_{new}=(60,65)$ ؟

بالتوفيق

الحل النموذجي لامتحان مقياس تحليل البيانات

التمرين الأول:

1- الإشكالية الإحصاء الكلاسيكي وتحليل البيانات:

اعتدنا من خلال الإحصاء الكلاسيكي دراسة المتغيرات واحدًا تلو الآخر لبناء العديد من الرسوم البيانية لمتغيرات. وهنا نجد أنفسنا أمام اشكالية حول الطرق والكيفيات التي يتم فيها استبدال هذه الرسوم برسم واحد (خريطة مسطحة Carte plane) وكيف يتم إعطاء نظرة شاملة لمجموعة النتائج. 0,2

بينما تحليل البيانات يمكننا من دراسة متغيرات الدراسة دفعة واحدة واستخلاص النتائج الشاملة لما يوفره من أساليب وطرق. 0,2

2/ جوهر طرق التحليل العاملي

هو العمل على تقليص، تخفيض المتغيرات في متغيرات أقل تسمى العوامل. 0,2

أو هو البحث عن ف. ش. ج يحفظ أكبر قدر ممكن من المعلومات ويمثل أحسن تمثيل 0,2

وتكمن أهمية التدوير في الفضاء في الحصول والبحث عن وضعية مثلى للمحاور بعد التدوير 0,2

3/ بنواة تطبيق خطي:

$$Ker f = \{v \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(v) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$$ 0,1

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x-y \ ; \ x+z) = 0\}$$ 0,25

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \begin{cases} x-y=0 \\ x+z=0 \end{cases}\right\}$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \begin{cases} y=x \\ z=-x \end{cases}\right\}$$ 0,25

$$= \{(x,x,-x) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \{x(1,1,-1) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$$ 0,25

$$Ker f = Vect\{(1,1,-1)\}$$ 0,25

التمرين الثاني

1) إيجاد المصفوفة المركزة:

أولا:

$\bar{X}_1 = -1-1+1+1/4 = 0$

$\bar{X}_2 = -3-3+3+3/4 = 0$ 0,1

$\bar{X}_3 = -2-2+2+2/4 = 0$

إذن المصفوفة المركزة هي X نفسها

$$X_c = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (0,1)$$

- إيجاد المصفوفة المعيارية

$S_1^2 = 1+1+1+1/4 = 1 \Rightarrow S_1 = 1$

$S_2^2 = 9+9+9+9/4 = 9 \Rightarrow S_2 = 3$

$S_3^2 = 4+4+4+4/4 = 4 \Rightarrow S_3 = 2$ (0,1)

ومنه :

$$X_{cr} = X_c * D_{1/s} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (0,1)$$

إيجاد مصفوفة الارتباطات :

$$R = \frac{1}{n} X'_{cr} X_{cr} \quad (0,25)$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (0,25)$$

ب/ تطبيق طريقة ACP :

1/ هل 6، 7 و 3 تمثل قيم ذاتية :

$$|V - \lambda I_3| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

* من أجل $\lambda = 6$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad (0,25)$$

$$= (-1)^{1+1} \times (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \times ((-1) \times (-2)) - (1 \times (-2))$$

$$= -2 + 2 = 0 \quad (0,25)$$

إذن $\lambda = 6$ هي قيمة ذاتية لـ V.

* من أجل $\lambda = 7$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \quad (0,25)$$

$$= (-1)^{1+1} \times (-2) \times \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) \times (-2) \times (-4) - 1 \times (-4)$$

$$= -16 + 4 = -12 \quad (0,25)$$

ومنه $\lambda = 7$ ليست قيمة ذاتية لـ V

* من أجل $\lambda = 3$:

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (0,25)$$

لأ هناك عمود أصفار (0,25)

ومنه فعلا $\lambda = 3$ هي قيمة ذاتية لـ V.

* بما أن 3، 6 قيم ذاتية لـ V فإمكاننا إيجاد القيمة المتبقية من خلال : (0,25)

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha = tr\, V$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 5 + 5 + 3$$

$$\Leftrightarrow 3 + 6 + \lambda_3 = 13$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = 13 - 9 = 4 \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = 4$$

* نقوم بترتيب هذه القيم الذاتية تنازليا: 0,25

$\lambda_1 = 6 \; ; \; \lambda_2 = 4 \; ; \; \lambda_3 = 3 .$

جدول القيم الذاتية: 0,25 0,25

الرقم	F_α	القيمة ذ	النسبة المئوية	ن.م. الصاعدة
1	F_1	6	46,15	46,15
2	F_2	4	30,77	76,92
3	F_3	3	23,08	100

إيجاد الأشعة الذاتية:

* من أجل $\lambda_1 = 6$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 0,25

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ -3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = x_1 \end{cases}$$

$$X'_1 = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1, 0) = x_1(1, 1, 0)$$ 0,25

ومنه $V'_1 = (1, 1, 0)$ هو شعاع ذاتي مرافق لـ $\lambda_1 = 6$.

* من أجل $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 0,25

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$X'_2 = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_1, 0) = x_1(1, -1, 0)$$

ومنه $V'_2 = (1, -1, 0)$ هو ش. ذ لـ $\lambda_2 = 4$ 0,25

* من أجل $\lambda_3 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 0,25

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

بالجمع نجد: $x_1 = x_2 = 0$

ومنه:

$$X'_3 = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, x_3) = x_3(0, 0, 1)$$ 0,25

ومنه $V'_3 = (0, 0, 1)$ هو شعاع ذاتي مرافق لـ $\lambda_3 = 3$.

* هذه الأشعة لابد أن تحقق

* $\|V_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \neq 1$

$\Rightarrow V'_1 = (1/\sqrt{2} \; ; \; 1/\sqrt{2} \; , \; 0)$ 0,25

* $\|V_2\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2} \neq 1$

$\Rightarrow V'_2 = (1/\sqrt{2} \; , \; -1/\sqrt{2} \; , \; 0)$

* $\|V_3\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$

$\Rightarrow V'_3 = (0, 0, 1)$

3/ - إيجاد المركبات الأساسية F_α :

$$F_\alpha = X_c U_\alpha$$ 0,25

$$= \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -4/\sqrt{2} & 2/\sqrt{2} & -2 \\ -4/\sqrt{2} & 2/\sqrt{2} & -2 \\ 4/\sqrt{2} & -2/\sqrt{2} & +2 \\ 4/\sqrt{2} & -2/\sqrt{2} & +2 \end{bmatrix}$$ 0,25

ومنه:

0,25

العوامل / الأفراد	F_1	F_2	F_3
1	-2,83	1,41	-2
2	-2,83	1,41	-2
3	2,83	-1,41	2
4	2,83	-1,41	2

4- حساب نسب مساهمة الأفراد في المحاور:

$$C_i^\alpha = \frac{F_\alpha^2(i)}{n\,\lambda_\alpha} \Rightarrow$$ 0,25

$$C_1^1 = \frac{F_1^2(1)}{4\times 6} = \frac{(-2,83)^2}{24} = 0,3337$$

$$C_1^2 = \frac{(1,41)^2}{4\times 4} = 0,1243$$

$$C_1^3 = \frac{(-2)^2}{4\times 3} = 0,3333$$

0,5

وبنفس الطريقة:

	F_1	F_2	F_3
1	33,37	12,43	33,33
2	33,37	12,43	33,33
3	33,37	12,43	33,33
4	33,37	12,43	33,33

0,25 * نسبة مساهمة الأفراد في تشكيل المحاور متساوية في كل محور

3/ حساب احداثيات المتغيرات على المحاور:

$$G_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha}\, u_\alpha$$ 0,25

$$G_1 = \sqrt{\lambda_1}\, u_1 = \sqrt{6}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,73 \\ 1,73 \\ 0 \end{bmatrix}$$ 0,25

$$G_2 = \sqrt{\lambda_2}\, u_2 = \sqrt{4}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,41 \\ -1,41 \\ 0 \end{bmatrix}$$ 0,25

$$G_2 = \sqrt{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,73 \end{bmatrix}$$ 0,25

ومنه:

0,25

	G_1	G_2	G_3
X_1	1,73	1,41	0
X_2	1,73	-1,41	0
X_3	0	0	1,73

التمرين الثالث

1/ حساب مصفوفة التباين-التباين المشترك

الفئة ①:

$$S_1 = \frac{1}{n_1-1} X_c' X_c$$ 0,25

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 8 & -11\\ -4 & -9 & 13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 8 & 9\\ -11 & 13\end{bmatrix}$$ 0,25

$$= \begin{bmatrix}97 & -113,5\\ -113,5 & 133\end{bmatrix}$$ 0,5

الفئة الثانية:

$$S_2 = \frac{1}{n_2-1} X_c' X_c$$ 0,25

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & -7 & 9\\ -6 & 8 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -6\\ -7 & 8\\ 9 & -2\end{bmatrix}$$ 0,25

$$= \begin{bmatrix}67 & -31\\ -31 & 52\end{bmatrix}$$ 0,5

2- ايجاد المصفوفة التباين المجمعة

$$S_p = \frac{(n_1-1)S_1 + (n_2-1)S_2}{n_1+n_2-2}$$ 0,25

$$= \frac{1}{2}(S_1+S_2) = \begin{bmatrix}82 & -72,25\\ -72,25 & 92,5\end{bmatrix}$$ 0,5

ايجاد المصفوفة العكسية S_p^{-1}

$$\det(S_p) = 82 \times 92,5 - (-72,25)^2$$
$$= 2328,94$$ 0,25

$$S_p^{-1} = \frac{1}{\det(S_p)} C^t = \begin{bmatrix}0,04 & 0,03\\ 0,03 & 0,04\end{bmatrix}$$ 0,5

ايجاد الدالة التمييزية:

$$\boxed{\delta_K(X) = X' S_p^{-1} \mu_K - \frac{1}{2} \mu_K' S_p^{-1} \mu_K}$$ 0,5

* بالنسبة للفئة ①:

$$\delta_1(x) = (60;65)\begin{bmatrix}0,04 & 0,03\\ 0,03 & 0,04\end{bmatrix}\begin{bmatrix}77\\ 79\end{bmatrix}$$ 0,25

$$-\frac{1}{2}(77;79)\begin{bmatrix}0,04 & 0,03\\ 0,03 & 0,04\end{bmatrix}\begin{bmatrix}77\\ 79\end{bmatrix}$$

$$= (4,35;4,4)\begin{pmatrix}77\\ 79\end{pmatrix} - \frac{1}{2}(5,45;5,47)\begin{pmatrix}77\\ 79\end{pmatrix}$$

$$= 682,55 - 425,89 = \boxed{256,66}$$ 0,5

* بالنسبة للفئة ②:

$$\delta_2(x) = (60;65)\begin{bmatrix}0,04 & 0,03\\ 0,03 & 0,04\end{bmatrix}\begin{bmatrix}52\\ 52\end{bmatrix}$$ 0,25

$$-\frac{1}{2}(52;52)\begin{bmatrix}0,04 & 0,03\\ 0,03 & 0,04\end{bmatrix}\begin{bmatrix}52\\ 52\end{bmatrix}$$

$$= (4,35;4,4)\begin{pmatrix}52\\ 52\end{pmatrix} - \frac{1}{2}(3,64;3,64)\begin{pmatrix}52\\ 52\end{pmatrix}$$

$$= 455 - 189,28 = \boxed{265,72}$$ 0,5

* التصنيف:

بما أن: $\delta_2(x) > \delta_1(x) \Rightarrow$ 0,25

المشاهدة الجديدة تنتمي إلى الفئة الثانية (راسب). 0,5