الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة 8 ماي 1945 قالمة

UNIVERSITE 8 MAI 1945 - GUELMA

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم التجارية

مطبوعة بيداغوجية في مقياس:

الإحصـــــاء 1

موجهة لفائدة طلبة السنة الأولى جدع مشترك (السداسي الأول)

إعداد الدكتور: مشعلي بلال

السنة الجامعية 2019/2018

تقديـــــــــم Préface

الحمد لله على نعمه وفضله كما ينبغي لجلال وجهه وعظيم سلطانه والصلاة والسلام على الصادق الأمين محمد بن عبد الله صلى الله عليه وسلم وبعد:

أضع بين يدي طلابي الأعزاء في شعبة العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير هذه المطبوعة الخاصة بمقياس الإحصاء 1 ولقد اعتمدت في إعداد محتواها على البرنامج المقرر من طرف اللجنة البيداغوجية الوطنية، وحرصت في إعداد هذه المطبوعة على تدعيم الدروس بأمثلة متنوعة وتمارين محلولة تسهل الفهم وتبسط النظريات.

وقد تكونت المطبوعة من خمسة فصول هي:

- الفصل الاول: مفاهيم عامة حول الإحصاء؛
- الفصل الثاني: عرض البيانات الإحصائية؛
- الفصل الثالث: مقاييس النزعة المركزية؛
- الفصل الرابع: مقاييس التشتت؛
- الفصل الخامس: مقاييس الشكل.

هذه باكورة جهدي لسنوات من التدريس أضعها بين يدي طلابي الأعزاء وزملائي الأفاضل، وإذ أدعوهم إلى تثمين هذا العمل بإبداء ملاحظاتهم وأفكارهم التي أقبلها بصدر رحب للاستفادة منها وتطوير هذا العمل.

وفي الختام لا يسعني إلا أن أشكر كل من ساعدني وساهم في إخراج هذه المطبوعة للقارئ الكريم.

والله ولي التوفيق

د/ مشعلي بلال

قالمة في 08 ماي2019 الموافق لـ 03 رمضان 1440

Table des Matières جـدول المــواد

الفصل الأول:

مفاهيم عامة حول الإحصاء

1/ ماهيـــــة الإحصـــــــاء

2/ المصطلـحات الإحصائيـــة

3/ تصنيف البيانات الإحصائية

4/ تماريـــن الفصـــــل الأول

الفصل الأول:

مفاهيم عامة حول الإحصاء

تمهيد الفصل:

من خلال هذا الفصل نتعرف على علم الإحصاء واستخداماته ومختلف المصطلحات المرتبطة به، وكذا كيفية تصنيف البيانات الإحصائية.

1/ ماهية الإحصاء:

يُقصد بالإحصاء Statistique مجموعة النظريات والطرق العلمية التي تبحث في جمع المعلومات وعرضها وتحليلها للوصول إلى نتائج تُستخدم في التنبؤ واتخاذ القرارات.

ويُستخدم الإحصاء في جميع المجالات والعلوم (الاقتصادية، الاجتماعية، الفيزيائية، الطبيعية، الطبية...الخ) فمثلاً في الاقتصاد يُستخدم الإحصاء في حساب معدلات النمو، دراسة السوق، كمية الإنتاج في القطاعات المختلفة، أما في الطب فيُستخدم الإحصاء في جمع تحليل المشاهدات الإكلينيكية، أما في علوم الاجتماع يُستخدم الإحصاء في معرفة عدد السكان لتحديد الاحتياجات.

وينقسم الإحصاء إلى قسمين: الإحصاء الوصفي والإحصاء الاستدلالي، ونتعرض من خلال هذه المطبوعة إلى الإحصاء الوصفي فقط.

إذن فالإحصاء الوصفي Statistique Descriptive أو ما يُعرف في المقرر الدراسي لكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير بالإحصاء 1 يُمكن تعريفه على أنه " ذلك العلم الذي يهدف إلى تصنيف البيانات وإعطائها وصفاً بسيطاً بواسطة عدد محدود من المقاييس والرسوم البيانية" أما عمليات التحليل والتنبؤ والاستشراف فمن اختصاصات الإحصاء الاستدلالي.

2/ المصطلحات الإحصائية:

الدارس للإحصاء والمطبق له عليه معرفة المصطلحات الأكثر استعمالاً في الإحصاء الوصفي وهي المجتمع، العينة، المفردة، الصفة (البيان).

1.2/ المجتمع Population: يُعرف المجتمع الإحصائي على أنه مجموعة من العناصر أو الأفراد التي ينصب عليها الاهتمام في دراسة معينة تكون ذات خصائص وصفات مشتركة، مثل مجتمع من الأسر، مجتمع من المؤسسات، مجتمع من الطلبة.

وقد يكون المجتمع الإحصائي محدود يُمكن إجراء الدراسة الإحصائية على كل مفرداته وكمثال على ذلك طلبة السنة أولى جذع مشترك علوم اقتصادية، أو غير محدود لا يُمكن حصر جميع مفرداته في هذه الحالة يُلجأ إلى أخذ عينة فقط من ذلك المجتمع وكمثال على ذلك مجتمع الأسماك في البحار والمحيطات لا يُمكن حصره.

ويُطلق أيضاً على دراسة كل عناصر المجتمع بالمسح الشامل، وفي حالة المجتمعات الكبيرة تُسمى بالتعداد Recensement وتُعتبر هذه الطريقة في الإحصاء مكلفة مادياً وتحتاج إلى وقت وجهد كبيرين لذلك تُعتمد هذه الطريقة في الجزائر كل 10 سنوات.

2.2/ العينة Echantillon: نظراً لصعوبة دراسة كل عناصر المجتمع في بعض الحالات (التكلفة، الوقت، الجهد) أو استحالتها يُلجأ إلى الاكتفاء بمجموعة صغيرة مأخوذة من المجتمع وتسمى بالعينة، إذن فالعينة هي مجموعة جزئية من مفردات المجتمع الإحصائي، وقد جرت العادة على اختيار مفرداتها بحيث يكون لكل مفردة من مفردات المجتمع نفس الفرصة بأن تكون ضمن مفردات العينة، لكي تُمثل العينة المجتمع أحسن تمثيل ومن ثم يتم تعميم النتائج المتوصل إليها، وهناك عدة أنواع من العينات (العينات العشوائية البسيطة، العينات العشوائية الطبقية، العينة الحصصية، العينة العمدية، العينة العنقودية...الخ).

3.2/ الوحدة الإحصائية Unité statistique: هي المفردة أو العنصر أو الجزء الأساسي المشكل للمجتمع أو العينة والذي تجرى عليه الدراسة الإحصائية، ويُشترط في الوحدة الإحصائية أن تكون خاضعة لتعريف دقيق وواضح يُميزه عن بقية المفردات غير الخاضعة للدراسة.

4.2/ الصفة (البيان) Caractère statistique: وتُسمى أيضاً بالمتغيرة الإحصائية Variable statistique وهي السمات والصفات التي يتصف بها أفراد العينة محل الدراسة الإحصائية، مثل الطول، الوزن، العمر، السعر، الخبرة، اللون، الجودة ...الخ.

3/ تصنيف البيانات الإحصائية:

تقسم البيانات أو الصفات إلى بيانات كمية وأخرى نوعية.

1.3/ البيانات الكمية Caractère quantitatif: هي البيانات التي تأخذ قيما رقمية (عددية)، وتنقسم إلى بيانات كمية منفصلة وأخرى متصلة.

1.1.3 / البيانات الكمية المنفصلة V.S. Discrète: هي البيانات التي تأخذ قيماً عددية صحيحة ولا تحتوي على قيم كسرية، وتكون قابلة للعد وغير قابلة للقياس، مثل: عدد المصانع في مدن مختلفة، عدد الأطفال لمجموعة من العائلات، عدد حوادث المرور في أيام مختلفة ...الخ.

2.1.3/ البيانات الكمية المتصلة V.S. Continue: هي البيانات التي تأخذ قيماً عددية حقيقية ويُمكن أن تحتوي على قيم كسرية، وتكون قابلة للقياس وغير قابلة للعد، مثل: الوزن، الطول، الحجم ...الخ.

2.3/ البيانات النوعية Caractère qualitatif: هي بيانات غير رقمية، تأخذ قيماً كيفية في شكل ملاحظات وأسماء، وتنقسم إلى بيانات نوعية ترتيبية وأخرى اسمية.

1.2.3/ البيانات النوعية الترتيبية V.S. Ordinal: هي بيانات اسمية أو وصفية تعبر عن الترتيب أو التفضيل، مثل: المستوى التعليمي، التقدير العلمي، الجودة ...الخ.

2.2.3/ البيانات النوعية الاسمية V.S. Nominal: هي بيانات أيضا اسمية أو وصفية مع عدم إمكانية ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً، مثل: الألوان، فصيلة الدم، الديانة ...الخ.

4/ تمارين الفصــل الأول:

التمرين (4–1): حدد المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائية، الصفة، طبيعة الصفة، وطبيعة المتغيرة لكل من:

- ✓ أطوال 50 رياضـي؛
- ✓ توزيع مجموعة من البلديات حسب عدد السكان؛
- ✓ أوزان مجموعة من الملاكمين؛
- ✓ ترتيب الولايات حسب كمية الأمطار المتساقطة؛
- ✓ توزيع العمال حسب المستوى التعليمي؛
- ✓ فصيلة الدم لمجموعة من المتبرعين.

حل التمرين (4–1):

المجتمع الإحصائي	الوحدة الإحصائية	الصفة (البيان)	طبيعة الصفة	طبيعة المتغيرة
50 رياضي	رياضي	الطول	كمية	متصلة
البلديات	البلدية	عدد السكان	كمية	منفصلة
الملاكمين	الملاكم	الوزن	كمية	متصلة
الولايات	الولاية	كمية الأمطار	كمية	متصلة
العمال	العامل	المستوى التعليمي	نوعية	ترتيبية
المتبرعين	متبرع	فصيلة الدم	نوعية	اسمية

التمرين (4–2): حدد نوع البيانات التالية: إن كانت نوعية "ترتيبية أو اسمية" أو كمية "منفصلة أو متصلة".

– الدخل السنوي – مكان الإقامة – العمر – لون العينين – عدد اللغات المنطوقة – الرتبة العسكرية.

حل التمرين (4–2):

البيان (الصفة)	كميــة		نوعيــة	
	منفصلـة	متصلـة	ترتيبيـة	اسميـة
الدخل السنوي		√		
مكان الإقامة				√
العمـر		√		
لون العينين				√
عدد اللغات	√			
الرتبة العسكرية			√	

الفصل الثاني:

عرض البيانات الإحصائية

1/ الجـــداول التكراريــة

2/ الرسومــات البيانيـــة

3/ تمارين الفصل الثاني

الفصل الثاني:

عـــــرض البيانــــــات الإحصائيـــــــة

تمهيد الفصل:

بعد جمع البيانات والمعطيات الإحصائية نجد أنفسنا أمام بيانات غير مرتبة وغير منظمة، لذلك ومن أجل الوصول إلى نتائج يمكن تعميمها أو يمكن التنبؤ من خلالها لا بد من تنظيم وترتيب هذه البيانات كخطوة ثانية بعد جمعها، حيث يمكن إظهار هذه البيانات في شكل جداول تكرارية تُعرض فيها البيانات مصنفة ومقسمة إلى مجموعات متجانسة وملخصة، كما يمكن أيضا عرض البيانات الإحصائية في شكل رسومات وأشكال بيانية تسهل على الدارس عملية التحليل والتدقيق والتعليق على هذه البيانات.

1/ الجداول التكراريـة:

الجدول التكراري عبارة عن ترتيب منظم للبيانات الإحصائية في أسطر وأعمدة بقصد إبراز أهمية تلك البيانات وتسهيل قراءتها، ويختلف شكل الجدول تبعا لعدد المتغيرات المدروسة وكذا نوع البيانات، حيث يوجد جداول تكرارية بسيطة وأخرى مركبة ويوجد أيضاً جداول تكرارية لبيانات نوعية وأخرى كمية.

1.1/ الجداول التكرارية البسيطة: في الجدول الإحصائي البسيط ندرس صفة واحدة حيث نضع في العمود الأول جميع الحالات الممكنة للصفة المدروسة ونضع في العمود الثاني التكرارات المطلقة المقابلة لكل قيمة تأخذها الصفة المدروسة.

1.1.1/ الجداول التكرارية البسيطة للبيانات النوعية (الكيفية): في هذا النوع من الجداول نجد بيانات غير عددية وإنما تكون في شكل صفات أو أنواع، ويتشكل الجدول التكراري في هذه الحالة من عمودين، يخصص العمود الأول للصفات بعد ترتيبها إن كانت قابلة للترتيب والعمود الثاني يخصص للتكرارات.

مثال (2−1): البيانات التالية تبين فصائل الدم لعشرين شخص:

A ،AB ،O ،O ،B ،O ،B ،A ،O ،A ،O ،B ،A ،O ،B ،A ،B ،O ،AB ،O

المطلوب: عرض هذه البيانات في جدول تكراري.

فصيلة الدم	التكرار
A	5
B	5
O	8
AB	2
المجموع	20

إن وضع هذه البيانات بهذه الصورة أصبح أكثر وضوحا لمعرفة العديد من المعلومات، فمثلا من السهل الآن معرفة عدد الأشخاص الذين لهم نفس فصيلة الدم، والفصيلة الأكثر انتشارا بين الأشخاص.

2.1.1/ الجداول التكرارية البسيطة للبيانات الكمية المنفصلة: في هذا النوع من الجداول نجد بها بيانات عبارة عن أرقام عددية صحيحة مثل عدد المصانع أو عدد السكان أو عدد الأولاد، ويحتوي الجدول التكراري في هذه الحالة على عمودين، الأول يمثل قيم الظاهرة بعد ترتيبها والثاني التكرارات المطلقة (F_i) المقابلة لكل قيمة من قيم الظاهرة المدروسة، ويكون الجدول التكراري البسيط كما يلي:

القيم X_i	التكرارات F_i
X_1	F_1
X_2	F_2
X_3	F_3
...	...
...	...
...	...
X_n	F_n
المجموع	$\sum_{i=1}^{n} F_i$

كما يُمكن إثراء الجدول التكراري البسيط من خلال إضافة أعمدة أخرى خاصة بكل من:

– **التوزيع التكراري النسبي (Fr):** **la fréquence relative** يتم حسابه من خلال تقسيم قيم التكرارات المطلقة على مجموع التكرارات ومنه: $Fr = \frac{f_i}{\Sigma f_i}$.

– **التوزيع التكراري النسبي المئوي$Fr(\%)$:** هو عبارة عن التكرار النسبي مضروب في 100، ومنه $Fr(\%) = Fr \times 100$

– **التوزيع التكراري المتجمع الصاعد (Fcc):la fréquence cumulée croissante** يُعرف التكرار المتجمع الصاعد على أنه مجموع التكرارات التي هي أقل من أو تساوي تكرار قيمة ما، وعليه يمكن حساب Fcc كما يلي:

$$Fcc = \begin{cases} 0 \\ F_1 \\ F_1 + F_2 \\ F_1 + F_2 + F_3 \\ . \\ . \\ \sum F_i \end{cases}$$

ملاحظة: يمكن أيضا حساب التكرار النسبي المتجمع الصاعد $Frcc$ والتكرار النسبي المئوي المتجمع الصاعد Frcc(%) حيث $Frcc = \frac{Fcc}{\sum F_i}$ و $Frcc(\%) = Frcc \times 100$

- **التوزيع التكراري المتجمع النازل** (Fcd) **:la fréquence cumulée décroissante** يعرف التكرار المتجمع النازل على أنه مجموع التكرارات التي هي أكبر من أو تساوي تكرار قيمة ما، وعليه يمكن حساب قيمة Fcd كما يلي:

$$Fcd = \begin{cases} \sum F_i \\ . \\ . \\ F_1 + F_2 + F_3 \\ F_1 + F_2 \\ F_1 \\ 0 \end{cases}$$

ملاحظة: يمكن أيضا حساب التكرار النسبي المتجمع النازل $Frcd$ والتكرار النسبي المئوي المتجمع النازل Frcd(%) حيث $Frcd = \frac{Fcd}{\sum F_i}$ و $Frcd(\%) = Frcd \times 100$

مثال (2−2): ليكن لدينا البيانات التالية والتي تمثل عدد الأسهم المملوكة لـ 20 شخص: 1، 3، 3، 7، 10، 15، 7، 7، 3، 1، 7، 10، 15، 15، 15، 7، 15، 15، 7، 15.

المطلوب: رتب هذه البيانات في جدول تكراري ثم احسب قيم كل من: Fr، Fr(%)، Fcc، Frcc، Frcc(%)، Fcd، Frcd، Frcd(%).

الحل:

X_i	F_i	Fr	Fr(%)	Fcc	Frcc	Frcc(%)	Fcd	Frcd	Frcd(%)
				0	0	0			
1	2	0,10	10	2	0,10	10	20	1,00	100
3	3	0,15	15	5	0,25	25	18	0,90	90
7	6	0,30	30	11	0,55	55	15	0,75	75
10	2	0,10	10	13	0,65	65	9	0,45	45
15	7	0,35	35	20	1,00	100	7	0,35	35
							0	0	0
Σ	20	1,00	100(%)	-	-		-	-	

يمكن قراءة بعض معطيات الجدول كما يلي:

- السطر الثاني: يوجد ثلاثة أشخاص يملكون ثلاثة أسهم ويمثلون نسبة 15% من مجموع العينة محل الدراسة؛
- نسبة الأشخاص الذين يملكون أقل من 10 أسهم هي 55% من مجموع العينة محل الدراسة؛
- نسبة الأشخاص الذين يملكون أكثر من أو يساوي 7 أسهم هي 75% من مجموع العينة محل الدراسة.

3.1.1/ الجداول التكرارية البسيطة للبيانات الكمية المتصلة: هي أكثر الجداول استخداماً ويمكن أن تأخذ مفرداتها أرقاما صحيحة أو كسرية، ولتعذر وضع كل هذه القيم نقسم هذا المجال إلى مجالات جزئية تسمى فئات Classes، حيث يتم تحديد عدد الفئات حسب حجم العينة المدروسة من جهة وحسب توزيع الوحدات الإحصائية من جهة أخرى، ولتشكيل الجدول التكراري الخاص بالبيانات الكمية المتصلة نتبع الخطوات التالية:

– **تحديد المدى العام:** يرمز له بالرمز E وهو المجال الذي تنتشر فيه البيانات إذ يمثل الفرق بين أكبر مشاهدة وأصغر مشاهدة، وعليه فإن: $E = X_i(\max) - X_i(min)$

– **تحديد عدد الفئات:** يتم تحديد عدد الفئات اللازمة لتشكيل الجدول التكراري باستخدام بعض المعادلات الرياضية، أهمها على الإطلاق هي معادلة ستيرج La règle de Sturge وتعطى هذه المعادلة بالصيغة التالية:

$$L = 1 + 3{,}332 \log n$$

حيث: L: عدد الفئات، log: اللوغاريتم العشري، n: عدد المشاهدات.

– **تحديد طول الفئة:** يتم تحديد طول الفئة بالعلاقة التالية:

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى العام}}{\text{عدد الفئات}} \qquad K = \frac{E}{L}$$

مثال (2–3): فيما يلي بيانات تمثل أطوال 50 تلميذ (الوحدة سم)

152	152	152	153	153	154	154	154	155	155
156	156	156	156	156	157	157	157	158	158
159	159	160	160	160	160	160	160	161	162
162	162	163	164	164	164	164	165	166	167
168	168	168	169	169	170	171	171	171	172

المطلوب: بافتراض أن لدينا 5 فئات شكل الجدول التكراري الفئوي لهذه البيانات مع تحديد قيم Fr، Fr(%)، Fcc، Fcd.

– حساب المدى العام: $E = X_i(\max) - X_i(\min) = 172 - 152 = 20$

– حساب طول الفئة: $K = \frac{E}{L} = \frac{20}{5} = 4$

ومنه يمكن تشكيل الجدول التكراري على النحو التالي:

Classes	F_i	Fr	Fr(%)	Fcc	Fcd
$[152-156[$	10	0,20	20	10	50
$[156-160[$	12	0,24	24	22	40
$[160-164[$	11	0,22	22	33	28
$[164-168[$	7	0,14	14	40	17
$[168-172]$	10	0,20	20	50	10
$\sum$	50	1	100%	-	-

2.1.1/ الجداول التكرارية المركبة:

يستخدم الجدول التكراري المركب عند دراسة ظاهرتين (خاصيتين) أو أكثر في آن واحد لمجتمع ما، ففي حالة إذا كنا نريد دراسة ظاهرتين فقط تخصص الأسطر لبيانات الظاهرة الأولى ويرمز لها بـ (X_i) وتخصص الأعمدة لبيانات الظاهرة الثانية ويرمز لها بـ (Y_i)، حيث: $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n.$

مثال (2–4): سحبت عينة عشوائية من مجتمع ما تتكون من 100 أسرة قصد دراسة ظاهرتين هما التركيبة الأسرية من حيث عدد الأطفال (X_i) والنفقات الاستهلاكية للأسرة (10^3 دج) (Y_i)، فكانت النتائج المتحصل عليها في الجدول التالي:

Y_i \ X_i	0	1	2	3	$\sum$
$[20-30[$	3	8	6	3	20
$[30-40[$	8	15	12	13	48
$[40-50]$	4	7	11	10	32
$\sum$	15	30	29	26	**100**

يمكن إجراء بعض القراءات التالية:

- توجد 15 عائلة لها طفل واحد ونفقاتها الاستهلاكية محصورة بين 30 ألف و40 ألف دج؛
- توجد 48 عائلة نفقاتها الاستهلاكية محصورة بين 30 ألف و40 ألف دج؛
- توجد 30 عائلة لها طفل واحد.

2/ الرسومات البيانيـة:

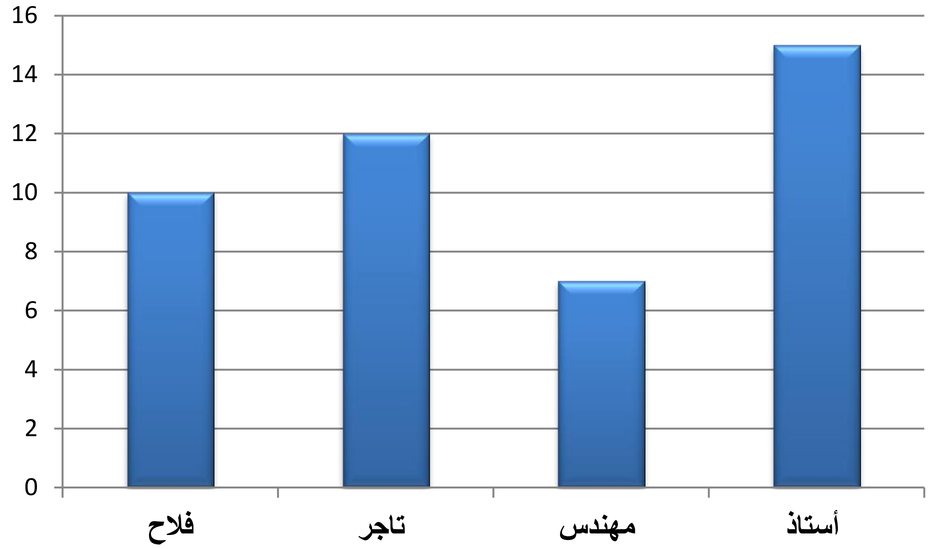
1.2/ الرسومات في حالة البيانات النوعية:

1.1.2/ الأعمدة البيانية البسيطة: هي عبارة عن مستطيلات متباعدة بمسافات ثابتة ولها قواعد متساوية تتناسب أطوالها مع تكرارات الخاصية المدروسة.

مثال (2–5): مثل عن طريق الأعمدة البيانية البسيطة معطيات الجدول التالي:

المهنية	فلاح	تاجر	مهندس	أستاذ
عدد الأشخاص	10	12	7	15

الحل:



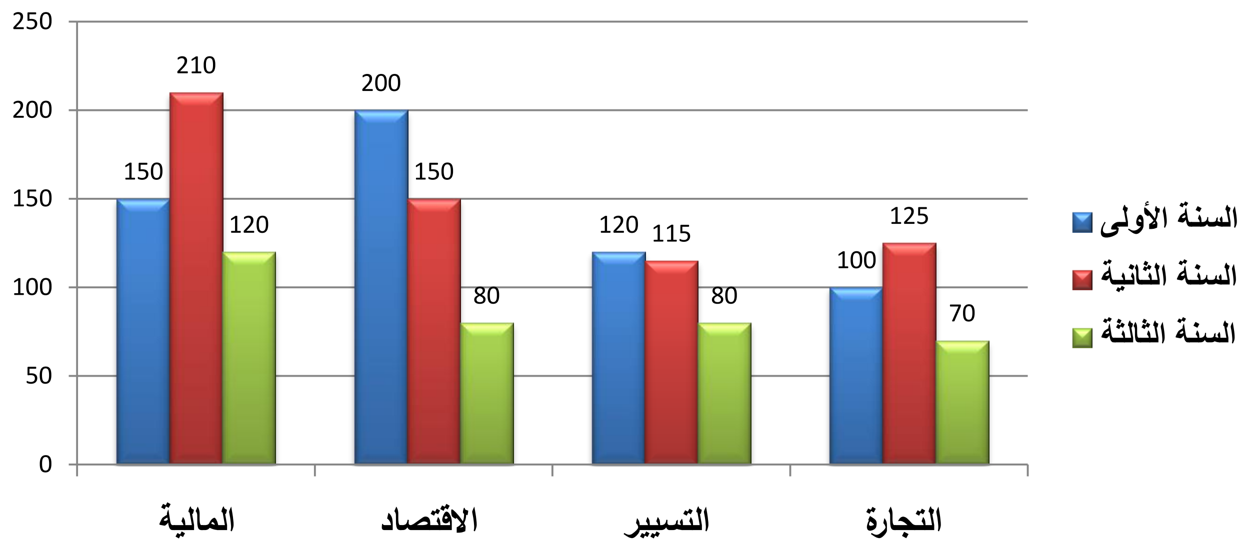
2.1.2/ الأعمدة البيانية المتلاصقة:

يستخدم هذا النوع من الرسم البياني في حالة الجداول التكرارية المركبة، ففي حالة الجدول التكراري المزدوج نجد الشكل البياني يتكون من مجموعات كلية خاصة بالظاهرة الأولى وداخل كل مجموعة مستطيلات متلاصقة تمثل الظاهرة الثانية.

مثال (2−6): في كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير وجد أن طلبة الليسانس يتوزعون كما يلي:

التخصص / المستوى	المالية	الاقتصاد	التسيير	التجارة	المجموع
السنة الأولى	150	200	120	100	**570**
السنة الثانية	210	150	115	125	**600**
السنة الثالثة	120	80	80	70	**350**
المجموع	**480**	**430**	**315**	**295**	**1520**

المطلوب: مثل معطيات هذا الجدول عن طريق الأعمدة البيانية المتلاصقة.

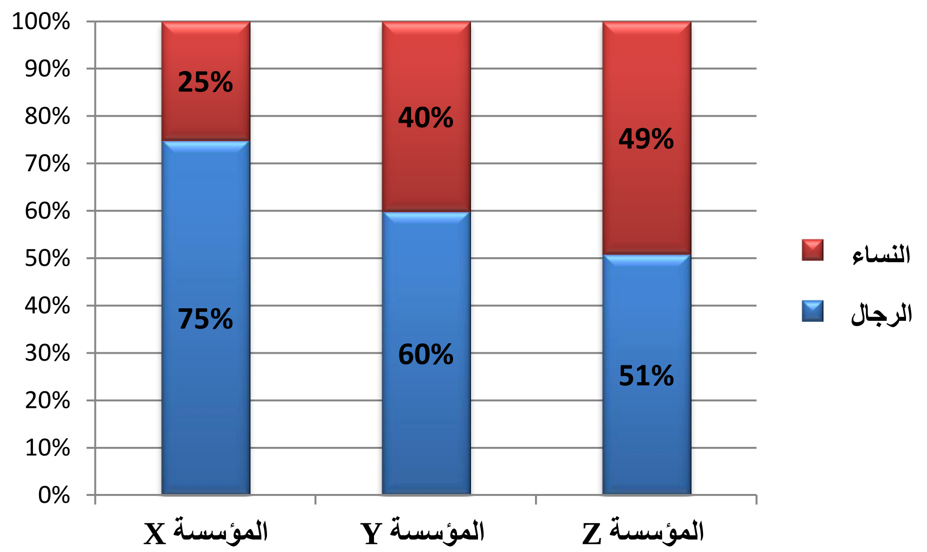


3.1.2/ الأعمدة البيانية المجزأة: الأعمدة البيانية المجزأة هي عبارة عن مستطيلات مجزأة، كل جزء يمثل خاصية من الظاهرة المدروسة، ومن الأفضل في هذه الحالة استخدام التكرارات النسبية المئوية حيث أن كل مستطيل طوله 100%.

مثال (2–7): تتوزع نسب الرجال والنساء العاملين في ثلاثة مؤسسات كما يلي:

المؤسسة	المؤسسة X	المؤسسة Y	المؤسسة Z
نسبة الرجال	75	60	51
نسبة النساء	25	40	49
المجموع	%100	%100	%100

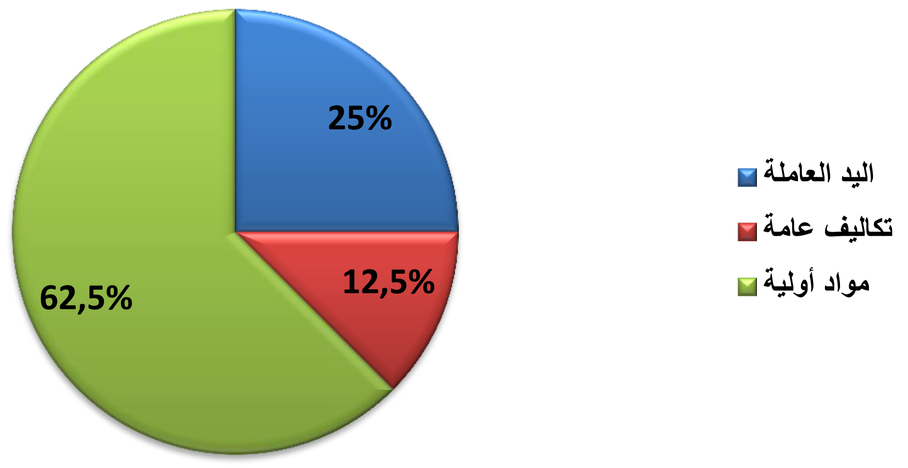
المطلوب: مثل الظاهرة عن طريق الأعمدة البيانية المجزأة.



4.1.2/ الرسم الدائري: هو عبارة عن أجزاء مقسمة داخل دائرة وكل جزء يمثل خاصية من الظاهرة المدروسة، وعادة ما يستخدم في حالة الرسم الدائري التكرارات النسبية.

مثال (2–8): تتوزع تكاليف الإنتاج لإحدى المؤسسات كما يلي: اليد العاملة (25%)، تكاليف عامة (12,5%)، مواد أولية (62,5%).

المطلوب: مثل الظاهرة بالرسم الدائري.

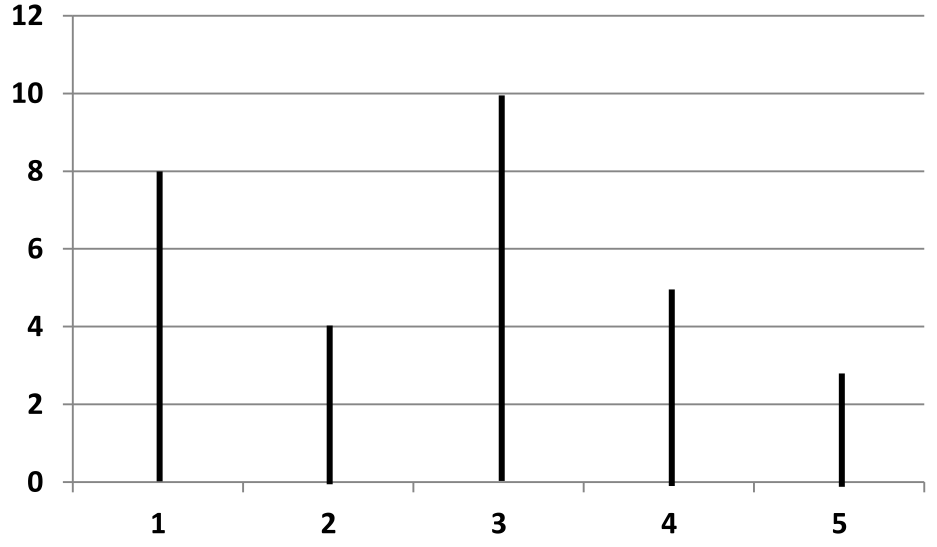


2.2/ الرسومات في حالة البيانات الكمية المنفصلة:

1.2.2/ الأعمدة البيانية النقطية: عبارة عن خطوط مستقيمة نقطية طولها يعبر عن التكرارات المطلقة للظاهرة المدروسة، وتستخدم الأعمدة النقطية لتمثيل البيانات الكمية المنفصلة فقط.

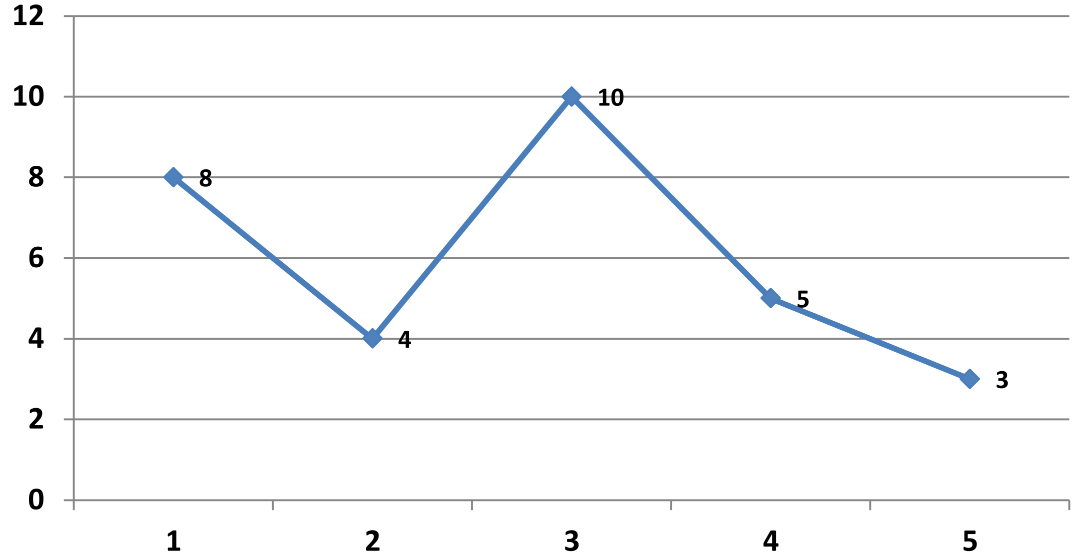
مثال (2–9): مثل بيانيا معطيات الجدول التكراري التالي:

X_i	1	2	3	4	5
F_i	8	4	10	5	3



2.2.2/ المضلع والمنحنى التكراري: يتم أولا تحديد النقاط الدالة على التكرارات ثم يرسم المضلع التكراري من خلال ربط هذه النقاط بخطوط مستقيمة، أما المنحنى التكراري فيتم التوصيل بين هذه النقاط بخط اليد.

مثال (2−10): مثل معطيات المثال السابق (2−9) بالمضلع التكراري.

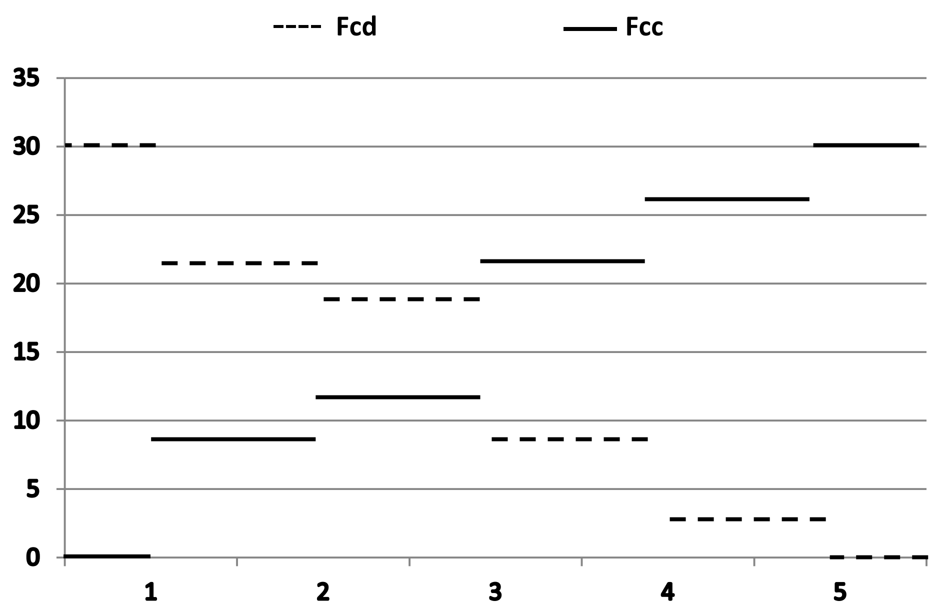


3.2.2/ المنحنى الدُرجي: يختص هذا الشكل بتمثيل قيم كل من المجمع التكراري الصاعد (Fcc) والمجمع التكراري النازل (Fcd) في حالة البيانات الكمية المنفصلة.

مثال (2−11): أحسب المجمع التكراري الصاعد والنازل للمثال السابق (2−9) ثم مثلهما بيانيا.

الحل:

X_i	1	2	3	4	5
F_i	8	4	10	5	3
Fcc	8	12	22	27	30
Fcd	30	22	18	8	3



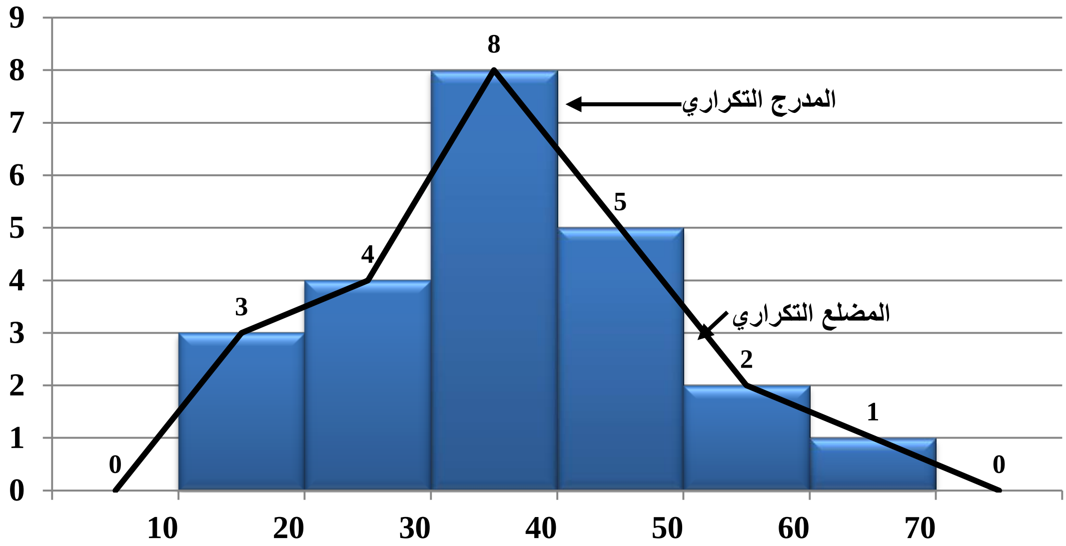
3.2/ الرسومات في حالة البيانات الكمية المتصلة:

1.3.2/ المدرج التكراري: هو عبارة عن سلسلة من المستطيلات المتلاصقة، حيث يمثل عرض المستطيل على محور الفواصل طول الفئة ويمثل طول المستطيل تكرار الفئة.

ملاحظة: عند ايصال منتصف القواعد العلوية للمستطيلات المشكلة للمدرج التكراري بمستقيمات نحصل على المضلع التكراري، وإذا تم ايصال هذه النقاط بخط اليد نحصل على المنحنى التكراري.

مثال (2−12): مثل بيانيا التوزيع التكراري التالي عن طريق المدرج التكراري والمضلع التكراري:

Classes	10 - 20	20 - 30	30 -40	40 - 50	50 - 60	60 – 70
Fi	3	4	8	5	2	1



حالة خاصة: في حالة كون الفئات غير متساوية الطول، فإننا نرسم المدرج التكراري والمضلع التكراري بالاعتماد على التكرار المعدل أو المصحح (F_i^*) وليس الأصلي، حيث: $F_i^* = \frac{\ \ i}{\ } = \frac{\text{التكرار الأصلي}}{\text{طول الفئة}}$

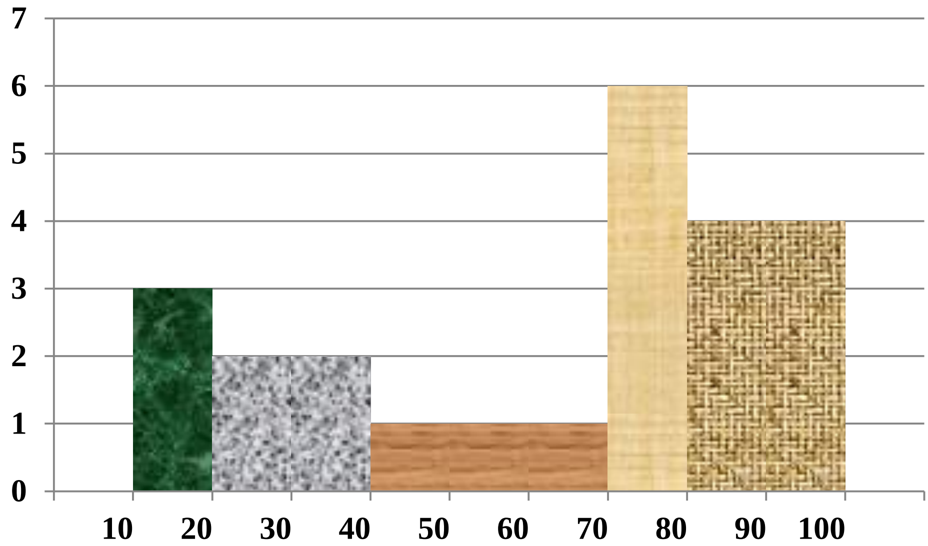
مثال (2−13): مثل بيانيا التوزيع التكراري التالي عن طريق المدرج التكراري:

Classes	10 - 20	20 - 40	40 - 70	70 - 80	80 – 100
Fi	30	40	30	60	20

الحل: بداية لا بد من حساب قيمة التكرار المعدل.

Classes	10 - 20	20 - 40	40 - 70	70 - 80	80 – 100
Fi	30	40	30	60	80
K	10	20	30	10	20
F_i^*	3	2	1	6	4

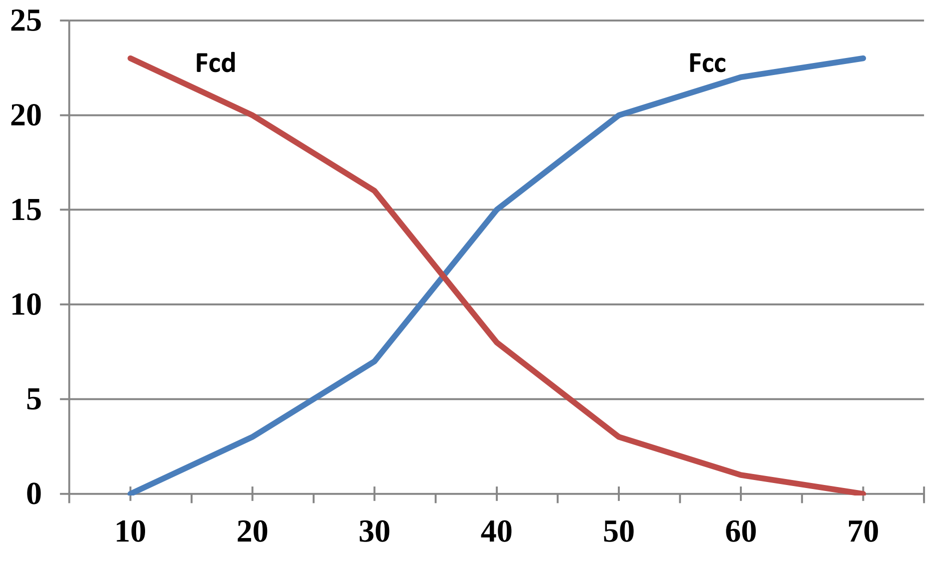
ومنه يمكن رسم المدرج التكراري بالاعتماد على قيم التكرار المعدل.



2.3.2/ المنحنى التكاملي والتفاضلي: المنحنى التكاملي يمثل لنا قيم المجمع التكراري الصاعد (Fcc) في حالة البيانات الكمية المتصلة بينما المنحنى التفاضلي يمثل قيم المجمع التكراري النازل (Fcd).

مثال (2–14): بالاعتماد على معطيات المثال رقم (2–12) أرسم المنحنى التكاملي والمنحنى التفاضلي.

Classes	10 - 20	20 - 30	30 -40	40 – 50	50 - 60	60 – 70
Fi	3	4	8	5	2	1
Fcc	3	7	15	20	22	23
Fcd	23	20	16	8	3	1



3/ تمارين الفصل الثاني:

التمرين (3−1): بفرض ان البيانات التالية تمثل اجمالي ما أنفقه 75 شخص خلال أسبوع (الوحدة 100 دج).

62	72	68	53	73	82	68	78	66	62	65	74	73	67	73
69	74	81	63	63	83	60	79	75	71	79	62	69	97	78
83	75	61	76	65	82	78	75	73	66	75	82	73	84	77
93	73	57	90	60	96	78	79	71	85	75	60	90	71	79
62	88	68	76	83	65	75	87	74	85	91	80	79	89	76

المطلوب:

1/ تحديد طبيعة المتغيرة المدروسة وطبيعتها؛

2/ وضع هذه البيانات في جدول تكراري بافتراض أن لدينا 8 فئات، وايجاد كل من: Fr، Fr(%)، Fcc، Fcd؛

3/ تحديد نسبة الأشخاص الذين تزيد نفقاتهم الأسبوعية عن 7700 دج؛

4/ تحديد عدد الأشخاص الذين تتراوح نفقاتهم بين 6500 و8000 دج؛

5/ رسم المدرج والمضلع التكراري.

حل التمرين (3−1):

1/ المتغيرة المدروسة: النفقات الأسبوعية، طبيعة المتغيرة: كمية متصلة.

2/ تشكيل الجدول التكراري:

$$K = \frac{E}{L} = \frac{x_i\,(\max) - x_i(\min)}{L} = \frac{97 - 53}{8} = 5{,}5 \ \simeq 6$$

Classes	Fi	Fr	Fr(%)	Fcc	Fcd
53 -59	2	0,027	02,7	2	75
59 - 65	10	0,133	13,3	12	73
65 - 71	11	0,147	14,7	23	63
71 - 77	22	0,293	29,3	45	52
77 - 83	15	0,200	20,0	60	30
83 - 89	8	0,107	10,7	68	15
89 - 95	5	0,067	06,7	73	7
95 - 101	2	0,027	02,7	75	2
$\sum$	75	1	100(%)	-	-

3/ نسبة الأشخاص الذين تزيد نفقاتهم الأسبوعية عن 7700 دج هي 40,1%.

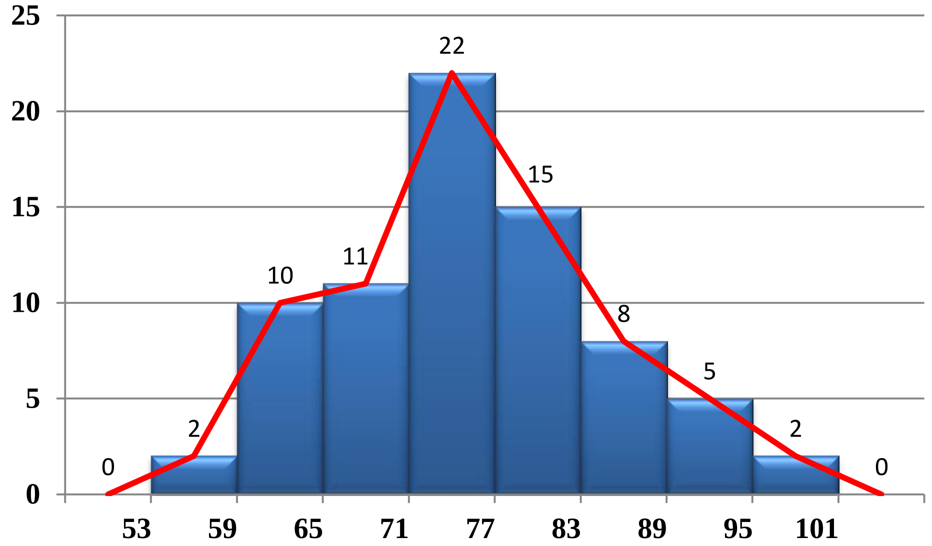
4/ عدد الأشخاص الذين تتراوح نفقاتهم بين 6500 و8000 دج هو:

11 [6500-7100[+ 22 [7100-7700[+ 8 [7700-8000[= 40

[7700-8300[: 600 $\to 15 \Rightarrow x = \frac{15\times300}{600} = 7{,}5 \simeq 8$

[7700-8000[: 300 $\to x$

5/ رسم المدرج والمضلع التكراري.



التمرين (3−2): الجدول التالي يمثل التوزيع النسبي المئوي لليد العاملة في مختلف القطاعات في مرحلتين مختلفتين.

السنة / القطاع	1960	1985
الفلاحة	62	25
الصناعة	6	14
البناء	4	17
الإدارة	17	28
الخدمات	11	16
مجموع النسب	%100	%100

المطلوب:

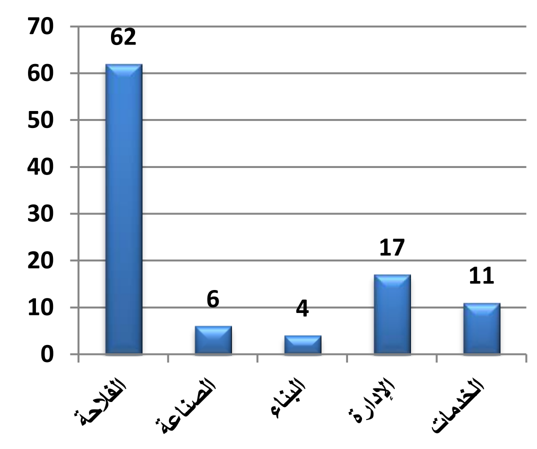
1/ مثل بيانات معطيات سنة 1960 بطريقتين مختلفتين؛

2/ مثل معطيات هذا الجدول في رسم واحد، وما هي استنتاجاتك؟.

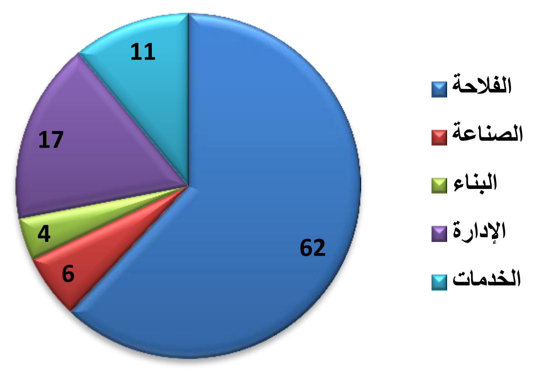
حل التمرين (3−2):

1/ تمثيل بيانات معطيات سنة 1960 بطريقتين مختلفتين:

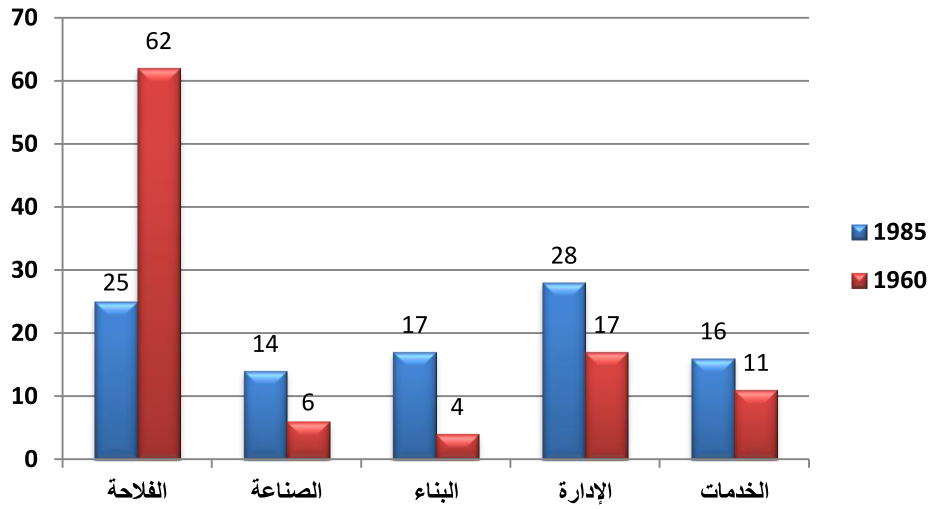
الأعمدة البيانية



الدائرة النسبية



2/ تمثيل معطيات هذا الجدول في رسم واحد:



الاستنتاج: سنة 1985 شهد تراجع كبير لنسبة العمال في قطاع الفلاحة لصالح قطاعات اخرى مثل الإدارة والصناعة وهذا راجع إلى تغير هيكل الاقتصاد الجزائري من اقتصاد زراعي وفلاحي غداة الاستقلال الى اقتصاد صناعي سنة 1985.

الفصل الثالث:

مقاييس النزعة المركزية

1/ الوســـــط الحســابي

2/ الـــــمـــــنـــــوال

3/ الـــوســـــيـــــط

4/ الربــيــعـــيــــــات

5/ المتوسط الهندســـــي

6/ المتوسط التوافقـــــي

7/ المتوسط التربيعــــي

8/ تمارين الفصل الثالث

الفصل الثالث:

مقاييـــــس النزعـــــــــة المركزيـــــــــــة

Caractéristiques de Tendance Centrale

Measures of the center of the data

تمهيد الفصل:

إن البحث في الميدان الإحصائي لا يكتفي بجمع المعلومات وتبويبها وتمثيلها بيانيا بل يحاول استعمال بعض العمليات والقوانين لكي يختصر هذه البيانات وهذا باستعمال بعض المؤشرات.

ففي معظم الحالات معطيات السلسلة لها ميل نحو الانتشار حول قيمة مركزية، هذه الأخيرة تستعمل كخاصة تنوب عن باقي المعطيات، وتعبر عن قيم المجموعة التي يشملها البحث، وهي تستعمل أساسا من أجل المقارنة مع سلاسل إحصائية أخرى ومن أجل معرفة خصائص السلسلة في حد ذاتها.

ومن بين مقاييس النزعة المركزية لدينا: الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال، الوسط الهندسي، الوسط التربيعي، الوسط التوافقي والربيعيات.

1/ الوسط الحسابي La Moyenne Arithmétique ($\bar{x}$)

1.1/ تعريف الوسط الحسابي: هو أشهر مقاييس النزعة المركزية وأكثرها استخداماً، يرمز له بالرمز $\bar{x}$ ويمكن تعريفه على أنه مجموعة من القيم مقسوماً على عددها (معدل القيم).

2.1/ طرق حساب الوسط الحسابي: تختلف طرق حساب الوسط الحسابي من حالة إلى أخرى حسب طبيعة البيانات الإحصائية.

1.2.1/ حالة البيانات المنفصلة (غير المبوبة): نميز في هذه الحالة بين البيانات غير المتكررة والبيانات المتكررة.

1.1.2.1/ حالة البينات غير المتكررة (المفردة): يطلق عليه في هذه الحالة بالوسط الحسابي البسيط، فإذا كان لدينا القيم التالية: $x_1, x_2, x_3, \dots \dots \dots x_n$ فان: $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}$ وبصورة عامة:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

مثال (3−1): لتكن لدينا القيم التالية: 10، 15، 70، 50، 30، 65.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{10+15+70+50+30+65}{6} = \frac{240}{6} = 40$$

2.1.2.1/ حالة البيانات المتكررة (المرجحة): يطلق عليه في هذه الحالة بالوسط الحسابي المرجح، فإذا كان لدينا القيم التالية: $x_1, x_2, x_3, \dots \dots \dots x_n$ وتكراراتها على التوالي هي: $f_1, f_2, f_3, \dots \dots \dots f_n$ فإن الوسط الحسابي يساوي: $\bar{x} = \frac{x_1 \times f_1 + x_2 \times f_2 + x_3 \times f_3 + \cdots + x_n \times f_n}{f_1+f_2+f_3+\cdots+f_n}$ وبصورة عامة:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum \boldsymbol{f_i x_i}}{\sum \boldsymbol{f_i}} = \sum \boldsymbol{fr_i x_i}$$

مثال(3−2): أحسب الوسط الحسابي للبيانات التالية:

المقياس	1	2	3	4	5	6
العلامة	10	12	9	7	15	2
المعامل	2	4	1	3	5	5

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{10 \times 2 + 12 \times 4 + 9 \times 1 + 7 \times 3 + 15 \times 5 + 2 \times 5}{2 + 4 + 1 + 3 + 5 + 5} = \frac{183}{20} = 9{,}15$$

2.2.1/ حالة البيانات المتصلة (المبوبة): المقصود بالبيانات المتصلة هو تلك البيانات التي تعرض في شكل فئات، ويحسب الوسط الحسابي في هذه الحالة بثلاثة طرق نستعرضها فيما يلي:

1.2.2.1/ الطريقة المباشرة: نستخدم في الطريقة المباشرة نفس القانون الخاص بالبيانات المنفصلة مع وجود تكرار مع استبدال قيم x_i بقيم c_i والتي تمثل قيم مراكز الفئات، ويصبح القانون كما يلي:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum \boldsymbol{f_i c_i}}{\sum \boldsymbol{f_i}} = \sum \boldsymbol{fr_i c_i}$$

2.2.2.1/ طريقة الوسط الفرضي: يحسب الوسط الحسابي في هذه الحالة بالاعتماد على الصيغة التالية:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\alpha} + \frac{\sum \boldsymbol{f_i w_i}}{\sum \boldsymbol{f_i}}$$

حيث: α يمثل الوسط الفرضي ويكون عادة مركز الفئة الذي يقابل أكبر تكرار؛

w_i يمثل الانحرافات أو الفروقات بين مراكز الفئات والوسط الفرضي α أي أن: $w_i = c_i - \alpha$.

3.2.2.1/ طريقة الانحرافات المختصرة: يحسب الوسط الحسابي في هذه الحالة بالاعتماد على الصيغة التالية:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\alpha} + \frac{\sum \boldsymbol{f_i w'_i}}{\sum \boldsymbol{f_i}} \times \boldsymbol{k}$$

حيث: α يمثل الوسط الفرضي، $w'_i = \frac{W_i}{K}$، k طول الفئة. يُشار إلى أن هذه الطريقة تُستخدم في الحالة التي يكون فيها أطوال الفئات متساوي فقط.

مثال (3−3): أحسب الوسط الحسابي بطرق مختلفة للبيانات التالية:

Classes	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 – 55
f_i	10	20	25	20	10

الحل:

$Classes$	f_i	c_i	$f_i \times c_i$	W_i	$f_i \times W_i$	K	W_i'	$f_i \times W_i'$
5 – 15	10	10	20	-20	-200	10	-2	-20
15 – 25	20	20	400	-10	-200	10	-1	-20
25 – 35	25	30	750	0	0	10	0	0
35 – 45	20	40	800	10	20	10	1	20
45 - 55	10	50	500	20	200	10	2	20
$\sum$	**85**	-	**2550**	-	**00**	-	-	**00**

1/ الطريقة المباشرة:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i c_i}{\sum f_i} = \frac{2550}{85} = \mathbf{30}$$

2/ طريقة الوسط الفرضي:

$$\bar{x} = \alpha + \frac{\sum f_i w_i}{\sum f_i} = 30 + \frac{0}{85} = \mathbf{30}$$

3/ طريقة الانحرافات المختصرة:

$$\bar{x} = \alpha + \frac{\sum f_i w_i'}{\sum f_i} \times k = 30 + \frac{0}{85} \times 10 = \mathbf{30}$$

3.1/ خصائص الوسط الحسابي:

- أكثر مقاييس النزعة المركزية استخداما؛
- المتوسط الحسابي قابل للعمليات الجبرية ولا يمكن حسابه بيانيا؛
- يتأثر بالقيم المتطرفة (القيم المتطرفة هي القيم الواقعة في طرفي مجال الدراسة)؛
- لا يمكن حسابه من جداول التوزيع التكراري المفتوحة من البداية و/أو النهاية وذلك لأنه يعتمد في حسابه على مراكز الفئات.

2/ المنـــوال Le Mode (Mo)

1.2/ تعريف المنوال: هو القيمة الأكثر تكراراً أو شيوعاً بين قيم المشاهدات، ويمكن أن يكون للبيانات أكثر من منوال وإذا لم تتكر القيم أو تكررت بنفس التكرار فلا وجود للمنوال، ويرمز له بالرمز Mo.

2.2/ طرق حساب المنوال: تختلف طرق حساب المنوال باختلاف طبيعة البيانات.

1.2.2/ البينات المنفصلة:

- إذا لم تتكرر القيم فلا وجود للمنوال؛
- إذا تكرر أحد القيم أكبر من البقية فهناك منوال واحد؛
- إذا كان لقيمتين نفس التكرار وهو الأكبر فيكون لمجموعة القيم منوالان.

مثال (3−4): احسب المنوال لكل من المفردات التالية:

1، 1، 2، 2، 3، 3، 4، 4	1، 2، 3، 4، 5، 5، 7	1، 1، 2، 2، 4، 5	1، 2، 3، 4، 5، 6، 7
نلاحظ أن القيم تتكرر بنفس التكرار ومنه لا وجود للمنوال	نلاحظ أن القيمة 5 تتكرر أكثر من بقية القيم ومنه يوجد منوال واحد (5)	نلاحظ أن القيمتين 1 و2 تتكرران بنفس التكرار وهو الأكبر ومنه يوجد منوالان (1) و (2)	نلاحظ أنه لا وجود لأي تكرار ومنه لا يوجد منوال.

2.2.2/ البيانات المتصلة: في الحالة التي تكون فيها البيانات على شكل فئات يمكن تحديد قيمة المنوال بطريقتين مختلفتين.

1.2.2.2/ الطريقة الرياضية: قبل تطبيق القانون لا بد من تحديد الفئة المنوالية والتي تقابل أكبر تكرار. ويأخذ القانون الصيغة التالية:

$$\boldsymbol{Mo = L_0 + \frac{(f_0 - f_1)}{(f_0 - f_1) + (f_0 - f_2)} \times K}$$

حيث: L_0: الحد الأدنى للفئة المنوالية، f_0: التكرار المطلق للفئة المنوالية، f_1: التكرار المطلق السابق للفئة المنوالية، f_2: التكرار المطلق اللاحق للفئة المنوالية، K: طول الفئة المنوالية.

مثال (3−5): أحسب المنوال للبيانات التالية:

Classes	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 – 60
f_i	5	10	25	20	15

الحل: الفئة المنوالية هي $]30 - 40]$ لأنها تقابل أكبر تكرار ومنه:

$$Mo = L_0 + \frac{(f_0 - f_1)}{(f_0 - f_1) + (f_0 - f_2)} \times K = 30 + \frac{(25 - 10)}{(25 - 10) + (25 - 20)} \times 10 = \mathbf{37,5}$$

حالة خاصة: في حالة ما إذا كان أطوال الفئات غير متساوي يتم استخدام قيم التكرار المعدل (المصحح) عوض التكرار الأصلي، حيث: $f_i^* = \frac{f_i}{k}$.

مثال (3−6): أحسب المنوال في الحالة التالية:

Classes	10 - 20	20 - 50	50 - 70	70 - 110	110 – 120
f_i	5	10	25	20	15

الحل: من خلال الجدول أعلاه نلاحظ أن أطوال الفئات غير متساوي ومنه لا بد من حساب التكرار المصحح قبل حساب المنوال.

Classes	10 - 20	20 - 50	50 - 70	70 - 110	110 – 120
f_i	10	60	30	20	20
K	10	30	20	40	10
$f_i^* \times 10$	10	20	15	5	20

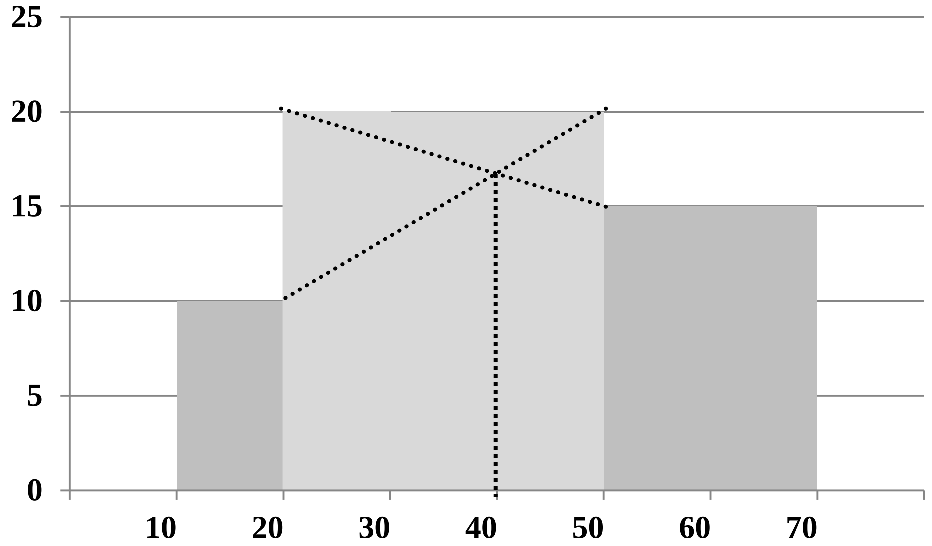
نلاحظ من خلال التكرار المعدل – بعد ضربه في المعامل الثابت (10) للتخلص من الفاصلة– أن هناك فئتان منواليتان:

$$[20-50[: Mo1 = 20 + \frac{(20-10)}{(20-10)+(20-15)} \times 30 = \mathbf{40}$$

$$[110-120[: Mo2 = 110 + \frac{(20-5)}{(20-5)+(20-0)} \times 10 = \mathbf{114,29}$$

2.2.2.2/ الطريقة البيانية (الهندسية): يُمكن تحديد المنوال بيانياً وذلك من خلال رسم المدرج التكراري للفئة المنوالية والفئتين السابقة واللاحقة لها، حيث نقوم بإيصال بداية المستطيل للفئة المنوالية ببداية المستطيل للفئة اللاحقة لها، ونهاية المستطيل للفئة المنوالية بنهاية المستطيل للفئة السابقة لها، و من نقطة التقاطع نسقط عمود على المحور الأفقي (محور الفواصل) ونقطة تقاطعه مع هذا المحور تعطي قيمة المنوال.

مثال (3–7): بالاعتماد على معطيات المثال (3–6) حدد قيمة المنوال الموجود في الفئة [20–50[.



نلاحظ من خلال الشكل أن الاسقاط العمودي لنقطة التقاطع كان عند القيمة 40 أي أن $Mo = 40$، تجدر الاشارة أنه لا يمكن حساب المنوال بيانياً إذا كان الفئات المنوالية موجودة على الأطراف.

3.2/ خصائص المنوال:

- أسهل مقاييس النزعة المركزية تحديدا؛
- لا يتأثر بالقيم المتطرفة؛
- يمكن حسابه بيانياً؛
- يمكن حسابه من جداول التوزيع التكراري المفتوحة؛
- يعتبر أفضل مقياس لوصف الظواهر الكيفية (النوعية).

3/ الوسيــط La Médiane (Me)

1.3/ تعريف الوسيط: قيمة المتغير الإحصائي الذي يفصل السلسلة الإحصائية إلى قسمين متساويين بعد ترتيب القيم تصاعدياً أو تنازلياً، أي هي المشاهدة التي تكون التكرارات التي تسبقها تساوي التكرارات التي تليها.

2.3/ طرق حساب الوسيط: تختلف طرق حساب الوسيط باختلاف طبيعة البيانات.

1.2.3/ البيانات المنفصلة: نميز هنا بين البينات المتكررة وغير المتكررة.

1.1.2.3/ البيانات غير المتكررة:

بداية نقوم بترتيب البيانات تصاعدياً أو تنازليا ثم نحدد رتبة الوسيط Rme

- **إذا كان عدد القيم (n) فردياً:** $Rme = \frac{n+1}{2}$ تكون قيمة Me هي القيمة التي ترتيبها Rme.
- **إذا كان عدد القيم (n) زوجيا:** نحدد قيمتين للوسيط الأولى ترتيبها $Rme = \frac{n}{2}$ وهي Me_1 والثانية ترتيبها $Rme = \frac{n}{2} + 1$ وهي Me_2 وبالتالي قيمة الوسيط هي: $Me = \frac{Me_1+Me_2}{2}$

مثال (3–8): أحسب الوسيط لكل من:

- السلسلة الأولى: 16، 5، 20، 10، 7، 2، 14.
- السلسلة الثانية: 25، 10، 40، 27، 50، 36، 43، 16.

الحل:

1/ السلسلة الأولى: 16، 5، 20، 10، 7، 2، 14. بعد الترتيب التصاعدي يصبح لدينا: 2، 5، 7، 10، 14، 16، 20. نلاحظ أن عدد المفردات فردي $(n = 7)$، رتبة الوسيط في هذه الحالة $Rme = \frac{n+1}{2} = 4$ أي أن الوسيط هي القيمة التي ترتيبها الرابع، ومنه: $Me = \mathbf{10}$

2/ السلسلة الثانية: 25، 10، 40، 27، 50، 37، 43، 16. بعد الترتيب التصاعدي يصبح لدينا: 10، 16، 25، 27، 37، 40، 43، 50. نلاحظ أن عدد المفردات فردي $(n = 8)$، معنى هذا أن الوسيط هو متوسط وسيطين الأول رتبته $Rme = \frac{n}{2} = 4$ أي أن $Me_1 = 27$ والثاني رتبته $Rme = \frac{n}{2} + 1 = 5$ أي أن $Me_2 = 37$ ومنه: $Me = \frac{Me_1+Me_2}{2} = \frac{27+37}{2} = \mathbf{32}$

2.1.2.3/ البيانات المتكررة:

في حالة إذا كانت البينات منفصلة مع وجود التكرار نحدد رتبة الوسيط $Rme = \frac{\sum f_i}{2}$ بين قيم التكرارات المتجمعة الصاعدة، القيمة المقابلة هي الوسيط.

ملاحظة: إذا كانت قيمة Rme موجودة بين قيم Fcc الوسيط يكون متوسط القيمتين السابقة واللاحقة لرتبة الوسيط.

مثال (3–9): بالنسبة لهذه البيانات المنفصلة إذا اردنا تحديد الوسيط يجب أولاً تحديد قيم Fcc ثم نحسب رتبة الوسيط $Rme = \frac{\sum f_i}{2} = 45$

x_i		10		20		30		40		50		$\sum$
f_i		5		10		25		35		15		90
Fcc	0		5		15		40	$Rme = 45$	75		90	-

يمكن ملاحظة أن قيمة $Rme = 45$ محصورة بين قيمتين من قيم Fcc وهي تقابل القيمة 40 ومنه $Me = \mathbf{40}$

2.2.3/ البيانات المتصلة: يوجد ثلاثة طرق لحساب الوسيط في حالة البيانات المتصلة.

1.2.2.3/ بالاعتماد على قيم Fcc:

نجعل التوزيع التكراري توزيعاً صاعدا (Fcc) ثم نحدد رتبة الوسيط $Rme = \frac{\sum f_i}{2}$ يستخدم ترتيب الوسيط في تحديد الفئة التي يقع فيها الوسيط وتدعى بالفئة الوسيطية ثم نحسب الوسيط باستخدام العلاقة التالية.

$$\boldsymbol{Me = L_0 + \frac{\frac{\sum f_i}{2} - F_1}{F_2 - F_1} \times K}$$

حيث: L_0: الحد الأدنى للفئة الوسيطية، F_1: التكرار المتجمع الصاعد السابق لرتبة الوسيط، F_2: التكرار المتجمع الصاعد اللاحق لرتبة الوسيط، K: طول الفئة الوسيطية.

ملاحظة: في حالة ما إذا كانت قيمة رتبة الوسيط تساوي قيمة من قيم Fcc فان الوسيط هو الحد الأعلى للفئة الوسيطية.

2.2.2.3/ بالاعتماد على قيم $\boldsymbol{Fcd}$:

نجعل التوزيع التكراري توزيعاً نازلاً (Fcd) ثم نحدد رتبة الوسيط $Rme = \frac{\sum f_i}{2}$ يستخدم ترتيب الوسيط في تحديد الفئة التي يقع فيها الوسيط وتدعى بالفئة الوسيطية ثم نحسب الوسيط باستخدام العلاقة التالية.

$$\boldsymbol{Me = L_0 + \frac{F_2 - \frac{\sum f_i}{2}}{F_2 - F_1} \times K}$$

حيث: L_0: الحد الأدنى للفئة الوسيطية، F_1: التكرار المتجمع النازل اللاحق لرتبة الوسيط، F_2: التكرار المتجمع الصاعد السابق لرتبة الوسيط، K: طول الفئة الوسيطية.

3.2.2.3/ بالاعتماد على الرسم البياني:

الوسيط بيانيا هو نقطة تقاطع كل من منحنى التكرار المتجمع الصاعد (المنحنى التكاملي) والنازل (المنحنى التفاضلي)، فالإسقاط العمودي لنقطة التقاطع بين المنحنيين على محور الفواصل يعطينا قيمة الوسيط، كما يمكن تحديده باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد أو النازل فقط، ويكون ذلك من خلال تعيين رتبة الوسيط على محور التراتيب، وصورة هذه النقطة على محور الفواصل تعطينا قيمة الوسيط.

مثال (3−10): ليكن لدينا الجدول التكراري التالي:

Classes	2 - 8	8 – 14	14 - 20	20 – 26	26 – 32
f_i	30	15	20	15	30

المطلوب: احسب قيمة الوسيط بالطريقة الرياضية والطريقة البيانية.

الحل:

Classes	f_i	Fcc	Fcd
		0	110
2 - 8	30		
		30	80
8 – 14	15		
		45	65
14 – 20	20	$Rme = 55$	$Rme = 55$
		65	45
20 - 26	15		
		80	30
26 - 32	30		
		110	0
$\sum$	110	-	

1/ حساب الوسيط بالاعتماد على قيم Fcc:

رتبة الوسيط $55 = \frac{\sum f_i}{2} = Rme$ نستنتج أن الفئة الوسيطية هي] 20 – 14] ومنه:

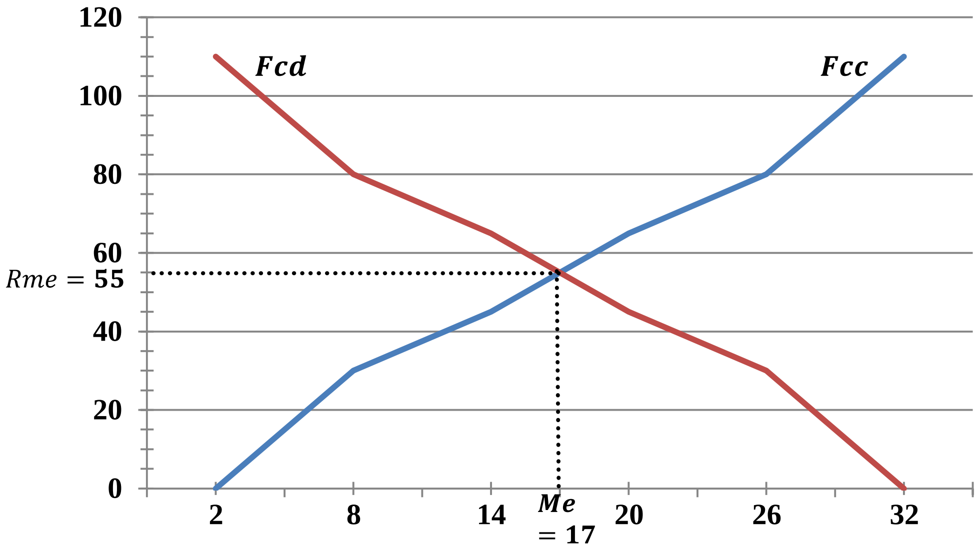
$$Me = L_0 + \frac{\frac{\sum f_i}{2} - F_1}{F_2 - F_1} \times K = 14 + \frac{55 - 45}{65 - 45} \times 6 = \mathbf{17}$$

2/ حساب الوسيط بالاعتماد على قيم Fcd:

رتبة الوسيط $55 = \frac{\sum f_i}{2} = Rme$ نستنتج أن الفئة الوسيطية هي] 20 – 14] ومنه:

$$Me = L_0 + \frac{F_2 - \frac{\sum f_i}{2}}{F_2 - F_1} \times K = 14 + \frac{65 - 55}{65 - 45} \times 6 = \mathbf{17}$$

3/ حساب الوسيط بيانياً: يتم حسابه من خلال رسم المنحنى التكاملي والتفاضلي.



من خلال الاسقاط العمودي لنقطة التقاطع بين المنحنى التكاملي والتفاضلي نجد أن $Me = 17$

3.3/ خصائص الوسيط:

- لا يتأثر بالقيم المتطرفة؛
- يمكن حسابه من جداول التوزيع التكراري المفتوحة؛
- يمكن حسابه بيانيا؛
- لا يدخل في حسابه جميع القيم ويتحدد بعدد البيانات وليس بقيمها.

4/ الربيعيـــات Les Quartiles

1.4/ تعريف الربيعيات: يطلق على الربيعيات أيضا بأشباه الوسيط، ويمكن تعريفها على أنها تلك القيم أو المشاهدات التي تقسم السلسلة الاحصائية إلى أربعة أجزاء متساوية الطول، حيث يمكن التمييز بين:

1.1.4/ الربيع الأول (Q_1): يسمى أيضا بالربيع الأدنى وهو المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها 25% من التكرارات بعد ترتيب البيانات تصاعدياً.

2.1.4/ الربيع الثاني (Q_2): يسمى أيضا بالربيع الأوسط وهو المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها 50% من التكرارات بعد ترتيب البيانات تصاعدياً، ومنه نستنتج أن الربيع الثاني هو نفسه الوسيط.

3.1.4/ الربيع الثالث (Q_3): يسمى أيضا بالربيع الأعلى وهو المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها 75% من التكرارات بعد ترتيب البيانات تصاعدياً.

2.4/ طرق حساب الربيعيات: تختلف طرق حساب الربيعيات باختلاف طبيعة البيانات، حيث نميز بين:

1.2.4/ البيانات المنفصلة: نميز هنا بين البيانات المتكررة وغير المتكررة.

1.1.2.4/ البيانات المنفصلة غير المتكررة: في هذه الحالة إذا كان عدد المفردات فردي يمكن حساب الربيعيات كما يلي:

الربيع الأول: ترتيب Q1 هو: $RQ_1 = \frac{n+1}{4}$ ومنه قيمة الربيع الأول هي القيمة التي تقع في هذا الترتيب بعد ترتيب القيم.

الربيع الثاني: هو نفسه الوسيط لذا فترتيب Q2 هو: $RQ_2 = \frac{n+1}{2}$ ومنه قيمة الربيع الثاني هي القيمة التي تقع في هذا الترتيب بعد ترتيب القيم.

الربيع الثالث: ترتيب Q3 هو: $RQ_3 = \frac{3(n+1)}{4}$ ومنه قيمة الربيع الثالث هي القيمة التي تقع في هذا الترتيب بعد ترتيب القيم.

2.1.2.4/ البيانات المنفصلة المتكررة: لحساب الربيعيات في هذه الحالة نقوم بتحديد موقع رتبة الربيع بالنسبة للتكرارات المتجمعة الصاعدة، ونستخرج قيمة الربيع بنفس القاعدة المستخدمة لاستخراج الوسيط.

مثال (3−11): ليكن لدينا الجدول التكراري التالي:

X_i	10	11	12	13	14
f_i	30	15	20	15	30

المطلوب: حدد قيمة الربيعيات.

الحل:

X_i	f_i	Fcc
		0
10	40	
		$RQ_1 = 40$
11	25	
		65
12	30	$RQ_2 = 80$
		95
13	25	
		$RQ_3 = 120$
14	40	
		160
$\sum$	160	-

$$RQ_1 = \frac{\sum f_i}{4} = 40 \Rightarrow Q_1 = \frac{10+11}{2} = \mathbf{10,5}$$

الربيع الأول هو متوسط القيمتين السابقة واللاحقة لرتبة الوسيط لأن رتبة الربيع الأول مساوية لقيمة من قيم

$$RQ_2 = \frac{\sum f_i}{2} = 80 \Rightarrow Q_2 = \mathbf{12}$$

الربيع الثاني هو القيمة المقابلة برتبته لأن الرتبة في هذه الحالة لا تساوي قيمة من قيم

$$RQ_3 = \frac{3\sum f_i}{4} = 120 \Rightarrow Q_3 = \frac{13+14}{2} = \mathbf{15,5}$$

الربيع الثالث هو متوسط القيمتين السابقة واللاحقة لرتبة الوسيط لأن رتبة الربيع الثالث مساوية لقيمة من قيم

2.2.4/ البيانات المتصلة: بداية يجب حساب رتبة الربيعيات ثم بالاعتماد على قيم التكرار المتجمع الصاعد نحسب قيم الربيعيات وفقاً للعلاقات التالية:

الربيع الأول: $RQ_1 = \frac{\sum f_i}{4} \Rightarrow Q_1 = L_0 + \frac{\frac{\sum f_i}{4} - F_1}{F_2 - F_1} \times k$

الربيع الثاني (الوسيط): $RQ_2 = \frac{\sum f_i}{2} \Rightarrow Q_2 = L_0 + \frac{\frac{\sum f_i}{2} - F_1}{F_2 - F_1} \times k$

الربيع الثالث: $RQ_3 = \frac{3\sum f_i}{4} \Rightarrow Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3\sum f_i}{4} - F_1}{F_2 - F_1} \times k$

مثال (3−12): ليكن لدينا الجدول التكراري التالي:

Classes	2 – 8	8 – 14	14 - 20	20 - 26	26 – 32
f_i	35	15	20	15	35

المطلوب: حدد قيمة الربيعيات.

الحل:

Classes	f_i	Fcc
		0
2 - 8	35	$RQ_1 = 30$
		35
8 – 14	15	
		50
14 – 20	20	$RQ_2 = 60$
		70
20 - 26	15	
		85
26 - 32	35	$RQ_3 = 90$
		120
$\sum$	120	-

$$RQ_1 = \frac{\sum f_i}{4} \Rightarrow Q_1 = L_0 + \frac{\frac{\sum f_i}{4} - F_1}{F_2 - F_1} \times k$$
$$= 2 + \frac{30 - 0}{35 - 0} \times 6 = \mathbf{7,14}$$

$$RQ_2 = \frac{\sum f_i}{2} \Rightarrow Q_2 = L_0 + \frac{\frac{\sum f_i}{2} - F_1}{F_2 - F_1} \times k$$
$$= 14 + \frac{60 - 50}{70 - 50} \times 6 = \mathbf{17}$$

$$RQ_3 = \frac{3\sum f_i}{4} \Rightarrow Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3\sum f_i}{4} - F_1}{F_2 - F_1} \times k$$
$$= 26 + \frac{90 - 85}{120 - 85} \times 6 = \mathbf{26,86}$$

ملاحظة: يوجد بالإضافة إلى الربيعيات قيم أخرى تسمى بالعشيرات Deciles والمئينات Percentiles.

العشيرات (D): مجموعة من القيم وعددها 9 تجزأ التوزيع التكراري إلى 10 أجزاء متساوية الطول.

المئينات (P): مجموعة من القيم وعددها 99 تجزأ التوزيع التكراري إلى 100 جزء متساوي الطول.

ويتم حساب العشيرات والمئينات بنفس طريقة حساب الوسيط والربيعيات مع اختلاف الرتب فقط.

5/ المتوسط الهندسي La Moyenne Géométrique (G)

1.5/ تعريف المتوسط الهندسي: يستخدم هذا المتوسط لوصف ظاهرة حسب نسبة تغيرها، وخصوصا عندما يكون سلوك الظاهرة يتبع نمط المتتالية الهندسية، إذن المتوسط الهندسي هو عبارة عن الجذر النوني لجداء القيم x_i أو c_i.

2.5/ طرق حساب المتوسط الهندسي: نميز في حساب المتوسط الهندسي بين البيانات المنفصلة والمتصلة.

1.2.5/ البيانات المنفصلة: نميز هنا بين البيانات المتكررة وغير المتكررة.

1.1.2.5/ البيانات المنفصلة غير المتكررة: يحسب المتوسط الهندسي في هذه الحالة كما يلي:

$$G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times \dots \times x_n}$$ أو $$logG = \frac{\sum \log x_i}{n} \Rightarrow G = 10^{logG}$$

مثال (3−13): ليكن لدينا البيانات التالية: 2، 3، 5، 8، 10. المتوسط الهندسي لهذه القيم هو:

$$G = \sqrt[5]{2 \times 3 \times 5 \times 8 \times 10} = \mathbf{4,74}$$

أو

$$logG = \frac{log2 + log3 + log5 + log8 + log10}{5} = \frac{0,30 + 0,48 + 0,70 + 0,90 + 1}{5}$$
$$= 0,676 \Rightarrow G = 10^{logG} = 10^{0,676} = \mathbf{4,74}$$

2.1.2.5/ البيانات المنفصلة المتكررة: يحسب المتوسط الهندسي في هذه الحالة كما يلي:

$$G = \sqrt[\sum f_i]{x_1^{f_1} \times x_2^{f_2} \times x_3^{f_3} \times \dots \times x_n^{f_n}}$$

أو

$$logG = \frac{\sum f_i \log x_i}{\sum f_i} = \sum fr_i \log x_i \;\Rightarrow G = 10^{logG}$$

2.2.5/ البيانات المتصلة: يحسب المتوسط الهندسي في هذه الحالة كما يلي:

$$G = \sqrt[\sum f_i]{c_1^{f_1} \times c_2^{f_2} \times c_3^{f_3} \times \dots \times c_n^{f_n}}$$

أو

$$logG = \frac{\sum f_i \log c_i}{\sum f_i} = \sum fr_i \log c_i \;\Rightarrow G = 10^{logG}$$

6/ المتوسط التوافقي La Moyenne Harmonique (H)

1.6/ تعريف المتوسط التوافقي: هو مقلوب المتوسط الحسابي لمقلوب القيم x_i أو c_i. ويُستخدم المتوسط التوافقي في حالة إذا كان المتوسط المدروس عبارة عن حاصل قسمة متغيرين آخرين مثل السرعة، الكثافة.

2.6/ طرق حساب المتوسط التوافقي: نميز بين في المتوسط التوافقي بين البيانات المنفصلة والمتصلة.

1.2.6/ البيانات المنفصلة: نميز هنا بين البيانات المتكررة وغير المتكررة.

1.1.2.6/ البيانات المنفصلة غير المتكررة: يحسب المتوسط التوافقي في هذه الحالة كما يلي:

$$H = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}$$

2.1.2.6/ البيانات المنفصلة غير المتكررة: يحسب المتوسط التوافقي في هذه الحالة كما يلي:

$$H = \frac{\sum f_i}{\sum \frac{f_i}{x_i}}$$

مثال (3−14): سيارة تقطع مسافة 200 كلم بسرعة 50 كلم/ساعة وتقطع مسافة 100 كلم بسرعة 100 كلم/ساعة

المطلوب: ما هو متوسط سرعة السيارة خلال مسارها؟

$$H = \frac{\sum f_i}{\sum \frac{f_i}{x_i}} = \frac{300}{\frac{200}{50} + \frac{100}{100}} = \frac{300}{5} = 60\ km/h$$

2.2.6/ البيانات المتصلة: يعبر عن القانون بالعلاقة التالية:

$$H = \frac{\sum f_i}{\sum \frac{f_i}{c_i}}$$

7/ المتوسط التربيعي (MQ) La Moyenne Quadratique

1.7/ تعريف المتوسط التربيعي: هو الجذر التربيعي للمتوسط الحسابي لمربعات القيم x_i أو c_i.

2.7/ طرق حساب المتوسط التربيعي: نميز بين في المتوسط التوافقي بين البيانات المنفصلة والمتصلة.

1.2.7/ البيانات المنفصلة: نميز هنا بين البيانات المتكررة وغير المتكررة.

1.1.2.7/ البيانات المنفصلة غير المتكررة: يحسب المتوسط التوافقي في هذه الحالة كما يلي:

$$MQ = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$

2.1.2.7/ البيانات المنفصلة غير المتكررة: يحسب المتوسط التوافقي في هذه الحالة كما يلي:

$$MQ = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\sum fr_i x_i^2}$$

2.2.7/ البيانات المتصلة: يعبر عن القانون بالعلاقة التالية:

$$MQ = \sqrt{\frac{\sum f_i c_i^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\sum fr_i c_i^2}$$

مثال (3−15): ليكن لدينا الجدول التكراري التالي:

Classes	2 - 4	4 – 6	6 - 8	8 - 10	10 – 12
f_i	4	3	2	3	4

المطلوب: حدد قيمة الربيعيات.

$$MQ = \sqrt{\frac{\sum f_i c_i^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{4 \times 3^2 + 3 \times 5^2 + 2 \times 7^2 + 3 \times 9^2 + 4 \times 11^2}{16}} = \sqrt{\frac{936}{16}}$$

$$= \sqrt{58{,}5} = \mathbf{7,65}$$

8/ تمارين الفصل الثالث:

التمرين (8−1): أحسب جميع مقاييس النزعة المركزية للقيم التالية: 2، 5، 7، 8، 10، 12، 15.

حل التمرين (8-1):

1/ $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{2+5+7+8+10+12+15}{6} = \frac{60}{6} = \mathbf{10}$

2/ $Rme = \frac{n+1}{2} = 4 \Rightarrow Me = \mathbf{8}$ (بعد الترتيب التصاعدي للقيم)

3/ Mo: لا وجود للمنوال لأن القيم لم تتكرر

4/ $logG = \frac{\sum \log x_i}{n} = \frac{\log(2)+\log(5)+\log(7)+\log(8)+\log(10)+\log(12)+\log(15)}{7} = \frac{6}{7} =$
$0{,}86 \Rightarrow G = 10^{0{,}86} = \mathbf{7{,}24}$

5/ $H = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}} = \frac{7}{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}} = \frac{7}{1{,}22} = \mathbf{5{,}74}$

6/ $MQ = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{2^2+5^2+7^2+8^2+10^2+12^2+15^2}{7}} = \sqrt{\frac{611}{7}} = \sqrt{87{,}29} = \mathbf{9{,}34}$

التمرين (8-2): البيانات التالية تعرض توزيع عمال ورشة بناء حسب الأيام التي اشتغلوها في شهر ما.

عدد الأيام	10	15	18	20	22	$\sum$
عدد العمال	10	12	8	6	4	40

المطلوب:

1/ تحديد المتغيرة المدروسة وطبيعتها

2/ حساب متوسط أيام اشتغال العمال.

3/ حساب الوسيط والمنوال.

حل التمرين (8-2):

1/ **المتغيرة المدروسة:** عدد أيام العمل في شهر ما. **طبيعتها:** كمية منفصلة.

2/ حساب متوسط أيام العمل:

x_i	f_i	$f_i \times x_i$	Fcc
			0
10	10	100	
			10
15	12	180	Rme=20
			22
18	8	144	
			30
20	6	120	
			36
22	4	88	
			40
$\sum$	**40**	**632**	**-**

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{632}{40} = \mathbf{15{,}8}$$

3/ حساب الوسيط والمنوال:

$$Rme = \frac{\sum f_i}{2} = 20 \Rightarrow Me = \mathbf{15}$$

$$Mo = \mathbf{15}$$

لأن هذه القيمة تقابل أكبر تكرار

التمرين (8–3): فيما يلي جدولاً تكرارياً يبين الأجور اليومية لـ 100 عامل:

Classes	160 - 180	180 – 200	200 - 220	220 - 240	240 - 260	260 – 280
f_i	7	20	33	25	11	4

المطلوب:

1/ أحسب الأجر المتوسط لهؤلاء العمال باستخدام طرق مختلفة.

2/ أحسب قيمة كل من الوسيط والمنوال.

حل التمرين (8–3):

1/ حساب المتوسط باستخدام طرق مختلفة:

$Classes$	f_i	c_i	$f_i \times c_i$	W_i	$f_i \times W_i$	K	W_i'	$f_i \times W_i'$	Fcc
160 – 180	7	170	1190	-40	-280	20	-2	-14	7
180 – 200	20	190	3800	-20	-400	20	-1	-20	27
200 – 220	33	210	6390	0	0	20	0	0	60
220 – 240	25	230	5750	20	500	20	1	25	85
240 – 260	11	250	2750	40	440	20	2	22	96
260 – 280	4	270	1080	60	240	20	3	12	100
$\sum$	**100**	-	**21500**	-	**500**	-	-	**25**	**-**

1.1/ $\bar{x} = \frac{\sum f_i c_i}{\sum f_i} = \frac{21500}{100} = \mathbf{215}$ (الطريقة المباشرة)

1.2/ $\bar{x} = \alpha + \frac{\sum f_i w_i}{\sum f_i} = 210 + \frac{500}{100} = \mathbf{215}$ (طريقة الوسط الفرضي)

1.3/ $\bar{x} = \alpha + \frac{\sum f_i w_i'}{\sum f_i} \times k = 210 + \frac{25}{100} \times 20 = \mathbf{215}$ (طريقة الانحرافات المختصرة)

2.1/ $Rme = \frac{\sum f_i}{2} = 50 \Rightarrow [200 - 220[$ الفئة الوسيطية

$$Me = L_0 + \frac{\frac{\sum f_i}{2} - F_1}{F_2 - F_1} \times K = 200 + \frac{50 - 27}{60 - 27} \times 20 = \mathbf{213,94}$$

2.2/ $Mo = L_0 + \frac{(f_0 - f_1)}{(f_0 - f_1) + (f_0 - f_2)} \times K = 200 + \frac{(33-20)}{(33-20)+(33-25)} \times 20 = \mathbf{212,38}$

الفصل الرابع:

مقاييس التشتت

1/ مفهـــــــــوم التشتــــت

2/ مقاييس التشتت المطلقة:

1.2/ المـــــدى العــــام

2.2/ الانحــراف المتوســـــط

3.2/ الانحــراف الوسيـــــط

4.2/الانحــراف الربيعـــــي

5.2/الانحــراف المعيـــاري

3/ مقاييس التشتت النسبية:

1.3/ معامل الاختـلاف الأول

2.3/ معامل الاختلاف الثاني

4/ تماريـن الفصـل الرابــع

الفصل الرابع:

مقاييـــــــــس التشتـــــــت

Caractéristiques de Dispersion

Measures of the Spread of Data

تمهيد الفصل:

إن مقاييس النزعة المركزية غير كافية لوحدها لتحديد خواص الظاهرة المدروسة بشكل جيد ولا سيما في مجال المقارنة بين عدة مجموعات من الظواهر المدروسة لأنه يمكن أن يكون لتوزيعين إحصائيين نفس المتوسط الحسابي ولكنهما يختلفان تماماً من حيث توزيع القيم حول هذا الوسط، وبالتالي نجد أن هناك ضرورة لقياس مقدار ابتعاد مختلف المشاهدات عن هذه القيمة المتوسطة.

مثال (4−1): ليكن لدينا السلسلتين الإحصائيتين التاليتين:

$$Serie\ 1: 90,\quad 95,\quad 100,\quad 105,\quad 110 \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{500}{5} = 100$$

$$Serie\ 2: 10,\quad 20,\quad 70,\quad 120,\quad 280 \Rightarrow \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{500}{5} = 100$$

نلاحظ أن السلسلة الإحصائية الأولى وسطها الحسابي يساوي 100 وهو يساوي المتوسط الحسابي للسلسلة الإحصائية الثانية، معنى ذلك أنه إذا اكتفينا بمقارنة الوسطين الحسابيين لكلتا المجموعتين فقد نستنتج أن السلسلتين متساويتين، غير أنه من ينظر إلى السلسلتين تظهر أنهما مختلفتين في الواقع، حيث أن بيانات السلسلة الأولى متقاربة من بعضها أو قريبة من قيمة المتوسط الحسابي بينما أن بيانات السلسلة الثانية متباعدة عن بعضها البعض، ولهذا نلجأ إلى مقاييس التشتت لمعرفة مدى تباعد القيم او تقاربها عن مركزها.

ونميز عند دراستنا لمقاييس التشتت بين:

- مقاييس التشتت المطلقة: والتي تضم كل من المدى العام، الانحراف المتوسط، الانحراف الوسيط، الانحراف الربيعي والانحراف المعياري.
- مقاييس التشتت النسبية: والتي تضم معامل الاختلاف الاول (الانحراف المعياري النسبي) و معامل الاختلاف الثاني (الانحراف الربعي النسبي).

وسنتطرق في هذا الفصل إلى مفهوم مقاييس التشتت وتعريفاتها وكذا طرق حسابها باختلاف طبيعة البيانات الاحصائية وبعض الخواص المتعلقة بها.

1/ مفهوم التشتت:

تشتت بيانات ظاهرة ما يقصد به درجة أو مقدار التفاوت أو الاختلاف بين مفردات هذه الظاهرة، وتعتبر بيانات الظاهرة متجانسة عندما تكون قيمها قريبة من بعضها البعض ونقول في هذه الحالة أنها غير مشتتة، أما إذا كانت بيانات الظاهرة متباعدة وغير متجانسة فنقول أن مفردات (قيم) الظاهرة مشتتة وغير مركزة.

وعليه يمكن تعريف مقاييس التشتت بانها "الدرجة التي تنتشر بها البيانات حول قيمتها المتوسطة"، أو بعبارة أخرى هي "مقياس يتمنن خلاله معرفة مدى قرب أو بعد مفردات السلسلة الاحصائية من أحد مقاييس النزعة المركزية".

2/ مقاييس التشتت المطلقة:

كما سبق وان ذكرنا تتكون هذه المقاييس من المدى العام، الانحراف المتوسط، الانحراف الوسيط، الانحراف الربيعي والانحراف المعياري.

1.2/ المدى العام (*E*) *L'Etendue*

المدى العام لمجموعة من البيانات هو الفرق بين أكبر مشاهدة وأصغر مشاهدة، ويعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$E = x_i(max) - x_i(min)$$

ونلجأ عادة إلى حساب المدى العام عند اهتمامنا بالقيم المتطرفة (المشتتة) أو في حالة تبويب البيانات وجعلها في شكل فئات.

وفي حالة البيانات المتصلة فإن المدى العام يساوي الفرق بين مركز الفئة الأخيرة ومركز الفئة الأولى أو يمكن حسابه أيضاً من خلال الفرق بين الحد الأعلى للفئة الأخيرة والحد الأدنى للفئة الأولى.

ويتصف المدى العام ببساطة الحساب وأنه سهل الفهم ويعتمد في حسابه على قيمتين فقط، كما أنه شديد التأثر بالقيم المتطرفة.

2.2/ الانحراف المتوسط ($e_{\bar{x}}$) *L'écart moyen*

يعرف الانحراف المتوسط على أنه متوسط القيم المطلقة لانحرافات القيم عن وسطها الحسابي، ونستخدم القيمة المطلقة لأن مجموع انحرافات القيم عن المتوسط الحسابي مساوية للصفر، وتختلف طرق حساب الانحراف المتوسط باختلاف طبيعة البيانات الإحصائية.

1.2.2/ البيانات المنفصلة غير المتكررة:

$$e_{\bar{x}} = \frac{\sum|x_i - \bar{x}|}{\mathrm{n}}$$

مثال (4–2): أحسب الانحراف المتوسط للبيانات التالية: 5، 10، 15، 20، 25، 45.

الحل:
$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{120}{6} = 20$$

$$e_{\bar{x}} = \frac{\sum|x_i - \bar{x}|}{\mathrm{n}}$$
$$= \frac{|5-20| + |10-20| + |15-20| + |20-20| + |25-20| + |45-20|}{6} = \frac{60}{6}$$
$$\Rightarrow e_{\bar{x}} = \mathbf{10}$$

2.2.2/ البيانات المنفصلة المتكررة:

$$e_{\bar{x}} = \frac{\sum f_i|x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \sum fr_i|x_i - \bar{x}|$$

مثال (4−3): أحسب الانحراف المتوسط لبيانات الجدول التكراري التالي:

x_i	2	3	4	5
f_i	1	4	3	2

الحل:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{36}{10} = 3,6$$

$$e_{\bar{x}} = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \frac{|2-3,6| + 4|3-3,6| + 3|4-3,6| + 2|5-3,6|}{10} = \frac{8}{10} = \mathbf{0,8}$$

3.2.2/ البيانات المتصلة: نفس القانون الذي استخدمناه في حالة البيانات المنفصلة مع وجود تكرار لكن مع استبدال القيم x_i بالقيم c_i (مراكز الفئات).

$$e_{\bar{x}} = \frac{\sum f_i |c_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \sum_{i=1}^{n} fr_i |c_i - \bar{x}|$$

3.2/ الانحراف الوسيط *L'écart médian* (e_{Me})

يُعرف الانحراف الوسيط على أنه متوسط القيم المطلقة لانحرافات القيم عن وسيطها، وتختلف أيضاً طرق حسابه باختلاف طبيعة البيانات الإحصائية.

1.3.2/ البيانات المنفصلة غير المتكررة:

$$e_{Me} = \frac{\sum |x_i - Me|}{\mathrm{n}}$$

مثال (4−4): أحسب الانحراف المتوسط للبيانات التالية: 2، 7، 10، 12، 15.

$$Rme = \frac{n+1}{2} = 3 \Rightarrow Me = 10$$

$$e_{Me} = \frac{\sum |x_i - Me|}{\mathrm{n}} = \frac{|2-10| + |7-10| + |10-10| + |12-10| + |15-10|}{5} = \frac{18}{5} = \mathbf{3,6}$$

2.3.2/ البيانات المنفصلة المتكررة:

$$e_{Me} = \frac{\sum f_i |x_i - Me|}{\sum f_i} = \sum fr_i |x_i - Me|$$

مثال (4−5): أحسب الانحراف الوسيط بالاعتماد على بيانات المثال رقم (3−9).

x_i	f_i	$\|x_i - Me\|$	$f_i\|x_i - Me\|$
10	5	30	150
20	10	20	200
30	25	10	250
40	35	0	0
50	15	10	150
$\sum$	**90**	-	**750**

$$Me = \mathbf{40} \quad \text{(تم حسابه سابقاً)}$$

$$e_{Me} = \frac{\sum f_i |x_i - Me|}{\sum f_i} = \frac{750}{90} = \mathbf{8,33}$$

3.3.2/ البيانات المتصلة: نفس القانون الذي استخدمناه في حالة البيانات المنفصلة مع وجود تكرار لكن مع استبدال القيم x_i بالقيم c_i (مراكز الفئات).

$$e_{Me} = \frac{\sum f_i |c_i - Me|}{\sum f_i} = \sum_{i=1}^{n} fr_i |c_i - Me|$$

مثال (4−6): أحسب الانحراف الوسيط بالاعتماد على بيانات المثال رقم (3−10)

Classes	f_i	c_i	$\lvert c_i - Me \rvert$	$f_i \lvert c_i - Me \rvert$
2 - 8	30	5	12	360
8 – 14	15	11	6	90
14 – 20	20	17	0	0
20 - 26	15	23	6	90
26 - 32	30	29	12	360
$\sum$	**110**	-	-	**900**

$$Me = 17 \text{(تم حسابه سابقا)}$$

$$e_{Me} = \frac{\sum f_i |c_i - Me|}{\sum f_i} = \frac{900}{110} = \mathbf{8,18}$$

4.2/الانحراف الربيعي (e_Q) *L'écart quartile*

يُعرف الانحراف الربيعي على أنه نصف المدى ما بين الربيع الأول Q_1 والربيع الثالث Q_3 وتكمن أهمية الانحراف الربيعي في كونه مقياس للتشتت قابل للحساب حتى من الجداول التكرارية المفتوحة.

ويُحسب الانحراف الربيعي وفقاً للعلاقة التالية:

$$e_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

مثال (4−7): بالاعتماد على نتائج المثال رقم (3−11) أحسب الانحراف الربيعي.

$$e_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{15,5 - 10,5}{2} = \mathbf{2,5}$$

مثال (4−8): أحسب الانحراف الربيعي لبيانات الجدول التكراري التالي:

Classes	10 - 20	20 – 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 – 70	$\sum$
f_i	18	30	25	17	12	8	110
Fcc	18	48	73	90	102	110	-

$$RQ_1 = \frac{\sum f_i}{4} = 27{,}5 \Rightarrow [20-30[\text{ فئة ربيعية أولى } ; \quad Q_1 = L_0 + \frac{\frac{\sum f_i}{4} - F_1}{F_2 - F_1} \times k$$

$$= 20 + \frac{27{,}5 - 18}{48 - 18} \times 10 = \mathbf{23{,}16}$$

$$RQ_3 = \frac{3\sum f_i}{4} = 82{,}5 \Rightarrow [40-50[\text{ فئة ربيعية ثالثة } ; Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3\sum f_i}{4} - F_1}{F_2 - F_1} \times k$$

$$= 40 + \frac{82{,}5 - 73}{90 - 73} \times 10 = \mathbf{45{,}59}$$

$$e_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{45{,}59 - 23{,}16}{2} = \mathbf{11{,}22}$$

5.2/الانحراف المعياري (δ_x) *L'écart type*

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي لمتوسط مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي، ويُحسب بعدة طرق وفقاً لطبيعة البيانات الإحصائية.

1.5.2/ البيانات المنفصلة غير المتكررة:

$$\delta_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)}$$

2.5.2/ البيانات المنفصلة المتكررة:

$$\delta_x = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{\sum f_i\, x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{1}{\sum f_i}\left(\sum f_i x_i^2 - \frac{(\sum f_i\, x_i)^2}{\sum f_i}\right)}$$

3.5.2/ البيانات المتصلة:

$$\delta_x = \sqrt{\frac{\sum f_i (c_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{\sum f_i\, c_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{1}{\sum f_i}\left(\sum f_i c_i^2 - \frac{(\sum f_i\, c_i)^2}{\sum f_i}\right)}$$

ملاحظات:

- مربع الانحراف المعياري يسمى التباين $V_x = \delta_x^2$، والتباين هو العزم المركزي من الدرجة الثانية؛
- يرمز للانحراف المعياري بالنسبة للعينة بالرمز S_x؛
- يُطرح العدد 1 من عدد المفردات $(n-1)$ أو $(\sum f_i - 1)$ في حساب الانحراف المعياري أو التباين في حالة العينات الصغيرة $(n < 30)$.

مثال (4-9): أحسب الانحراف المعياري للبيانات التالية: 2، 8، 14، 20، 26.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{2+8+14+20+26}{5} = \frac{70}{5} = 14$$

$$\delta_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{12^2+6^2+0^2+6^2+12^2}{5}} = \sqrt{\frac{360}{5}} = \mathbf{8,49}$$

$$\delta_x = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)} = \sqrt{\frac{1}{5}\left(1340 - \frac{(70)^2}{5}\right)} = \sqrt{\frac{360}{5}} = \mathbf{8,49}$$

مثال (4−10): أحسب الانحراف المعياري والتباين لبيانات الجدول التكراري التالي:

Classes	f_i	c_i	$f_i \times c_i$	$(c_i-\bar{x})$	$(c_i-\bar{x})^2$	$f_i(c_i-\bar{x})^2$
2 - 8	30	5	150	-12	144	4320
8 – 14	15	11	165	-6	36	540
14 – 20	20	17	340	0	0	0
20 - 26	15	23	345	6	36	540
26 - 32	30	29	870	12	144	4320
$\sum$	**110**	-	**1870**		-	**9720**

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i c_i}{\sum f_i} = \frac{1870}{110} = 17$$

$$\delta_x = \sqrt{\frac{\sum f_i(c_i-\bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{9720}{110}} = \mathbf{9,40} \Rightarrow V_x = \delta_x^2 = (9{,}40)^2 = \mathbf{88,36}$$

3/ مقاييس التشتت النسبية:

إذا كانت مقاييس التشتت المطلقة تقيس نفس الظاهرة محل الدراسة فإننا نلجأ إلى مقاييس التشتت النسبية في حالة المقارنة بين تشتت توزيعات لظواهر مختلفة أو نفس التوزيع لكن على مستويات مختلفة من أجل التخلص من تأثير اختلاف وحدات القياس وكذلك التخلص من تأثير اختلاف قيم المتوسطات والربيعيات.

ولإجراء ذلك نستخدم مقياس يسمى بمعامل الاختلاف وله صورتان: معامل الاختلاف الأول (الانحراف المعياري النسبي) ومعامل الاختلاف الثاني (الانحراف الربعي النسبي).

1.3/ معامل الاختلاف الأول *Coefficient de variation 1* (CV_1)

يُسمى أيضاً بالانحراف المعياري النسبي، نحتاج في حسابه إلى كل من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري وفقاً للعلاقة التالية:

$CV_1 = \frac{S_x}{\bar{x}} \times 100$ إذا تعلق الأمر بالعينة.

$CV_1 = \frac{\delta_x}{\bar{x}} \times 100$ إذا تعلق الأمر بالمجتمع.

مثـال ($4-11$): بعد تصـحيح اوراق الامتحانـات لمجمـوعتين مـن الطلبـة وُجد أن متوسـط علامـات المجموعـة الأولـى هو 16 بـانحراف معيـاري مقداره 2، بينما متوسط علامات المجموعـة الثانيـة هو 13 بـانحراف معيـاري قدره 3. أي المجموعتين أكثر تشتتاً؟

الحل: للإجابة على السؤال يجب حساب معامل الاختلاف الأول في كلتا المجموعتين ومقارنة النتائج.

$$CV_1(G_1) = \frac{S_x}{\bar{x}} \times 100 = \frac{2}{16} \times 100 = \mathbf{12,5}\%$$

$$CV_1(G_2) = \frac{S_x}{\bar{x}} \times 100 = \frac{3}{13} \times 100 = \mathbf{23,08}\%$$

من خلال النتائج المتحصل عليها نستنتج أن علامات المجموعة الثانية (G_2) أكثر تشتتاً (تباعداً فيما بينها) مقارنة بعلامات المجموعة الأولى (G_1).

2.3/ معامل الاختلاف الثاني (CV_2) *Coefficient de variation 2*

يُسمى أيضاً بالانحراف الربيعي النسبي، نحتاج في حسابه إلى حساب أولاً قيم الربيعيات الثلاثة، ويُحسب وفقاً للعلاقة التالية:

$$CV_2 = \frac{Q_3 - Q_1}{Me} \times 100$$

مثال ($4-12$): قارن بين تشتت التوزيعين التاليين:

المجموعة 1: 8، 12، 16، 20، 24، 28، 32.

المجموعة 2: 2، 7، 12، 17، 22، 27، 32.

الحل:

$$G_1: RQ_1 = \frac{(n+1)}{4} = 2 \Rightarrow Q_1 = \mathbf{12};\ RQ_2 = \frac{(n+1)}{2} = 4 \Rightarrow Q_2 = \mathbf{20};\ RQ_3 = \frac{3(n+1)}{4} = 6 \Rightarrow Q_3 = \mathbf{28}$$

$$CV_2(G_1) = \frac{Q_3 - Q_1}{Me} \times 100 = \frac{28-12}{20} \times 100 = \mathbf{80}\%$$

$$G_2: RQ_1 = \frac{(n+1)}{4} = 2 \Rightarrow Q_1 = \mathbf{7};\ RQ_2 = \frac{(n+1)}{2} = 4 \Rightarrow Q_2 = \mathbf{17};\ RQ_3 = \frac{3(n+1)}{4} = 6 \Rightarrow Q_3 = \mathbf{27}$$

$$CV_2(G_2) = \frac{Q_3 - Q_1}{Me} \times 100 = \frac{27-7}{17} \times 100 = \mathbf{117,65}\%$$

بمـا أن: $CV_2(G_2) > CV_2(G_1)$ نسـتنتج أن قيم المجموعـة 2 أكبـر تشـتتاً (متباعـدة فيمـا بينهـا) مقارنـة بقيم المجموعة 1.

4/ تمارين الفصل الرابع

التمرين (4–1): أثبت أن:

$$\delta_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)}$$

حل التمرين (4–1):

$$\delta_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2)} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum x_i}{n} + \frac{\sum \bar{x}^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - 2\bar{x}\times\bar{x} + \frac{n\bar{x}^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \frac{(\sum x_i)^2}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)}$$

التمرين (4–2): أحسب جميع مقاييس التشتت للبيانات التالية:

Classes	0 - 2	2 – 4	4 - 6	6 – 8	8 – 10	10 – 12
f_i	8	20	12	12	20	8

حل التمرين (4–2):

$Classes$	f_i	c_i	$f_i \times c_i$	Fcc	$\lvert c_i - \bar{x}\rvert$	$f_i\lvert c_i - \bar{x}\rvert$	$\lvert c_i - Me\rvert$	$f_i\lvert c_i - Me\rvert$	$(c_i-\bar{x})^2$	$f_i(c_i-\bar{x})^2$
$0-2$	8	1	8	8	5	40	5	40	25	200
$2-4$	20	3	60	28	3	60	3	60	9	180
$4-6$	12	5	60	40	1	12	1	12	1	12
$6-8$	12	7	84	52	1	12	1	12	1	12
$8-10$	20	9	180	72	3	60	3	60	9	180
$10-12$	8	11	88	80	5	40	5	40	25	200
$\sum$	**80**	-	**480**	-	-	**224**	-	**224**	-	**784**

$$1.\ \bar{x} = \frac{\sum f_i c_i}{\sum f_i} = \frac{480}{80} = 6 \Rightarrow e_{\bar{x}} = \frac{\sum f_i\lvert c_i-\bar{x}\rvert}{\sum f_i} = \frac{224}{80} = \mathbf{2,8}$$

$$2.\ Me = L_0 + \frac{\frac{\sum f_i}{2} - F_1}{F_2 - F_1}\times K = 4 + \frac{40-28}{40-28}\times 2 = 6 \Rightarrow e_{Me} = \frac{\sum f_i\lvert c_i - Me\rvert}{\sum f_i} = \frac{224}{80}$$
$$= \mathbf{2,8}$$

$$3.\begin{cases} Q_1=L_0+\dfrac{\frac{\sum f_i}{4}-F_1}{F_2-F_1}\times k=2+\dfrac{20-8}{28-8}\times 2=3{,}2 \\ Q_3=L_0+\dfrac{\frac{3\sum f_i}{4}-F_1}{F_2-F_1}\times k=8+\dfrac{60-52}{72-52}\times 2=8{,}8 \end{cases} \Rightarrow e_Q=\frac{Q_3-Q_1}{2}=\frac{8{,}8-3{,}2}{2}=\mathbf{2{,}8}$$

$$4.\ \delta_x=\sqrt{\frac{\sum f_i(c_i-\bar{x})^2}{\sum f_i}}=\sqrt{\frac{784}{80}}=\sqrt{9{,}8}=\mathbf{3{,}13}$$

$$5.\ CV_1=\frac{\delta_x}{\bar{x}}\times 100=\frac{3{,}13}{6}\times 100=\mathbf{52{,}16}\%$$

$$6.\ CV_2=\frac{Q_3-Q_1}{Me}\times 100=\frac{8{,}8-3{,}2}{6}\times 100=\mathbf{93{,}33}\%$$

التمرين (4-3): ما هي مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت التي يُمكن حسابها من التوزيع التكراري التالي:

Classes	10 - 15	15 – 25	25 - 30	30 – 40	> 40
f_i	2	12	25	15	6

حل التمرين (4-3):

Classes		10 - 15		15 – 25		25 - 30		30 – 40		> 40		$\sum$
f_i		2		12		25		15		6		60
Fcc	0		2		14	RQ_1 Rme	39	RQ_3	54		60	-

1/ نستطيع حساب الوسيط:

$$Rme=\frac{\sum f_i}{2}=30\Rightarrow Me=L_0+\frac{\frac{\sum f_i}{2}-F_1}{F_2-F_1}\times K=25+\frac{30-14}{39-14}\times 5=\mathbf{28{,}2}$$

2/ نستطيع حساب الربيع الأول والثاني:

$$RQ_1=\frac{\sum f_i}{4}=15\Rightarrow Q_1=L_0+\frac{\frac{\sum f_i}{4}-F_1}{F_2-F_1}\times K=25+\frac{15-14}{39-14}\times 5=\mathbf{25{,}2}$$

$$RQ_3=\frac{3\sum f_i}{4}=45\Rightarrow Me=L_0+\frac{\frac{3\sum f_i}{4}-F_1}{F_2-F_1}\times K=30+\frac{45-39}{54-39}\times 10=\mathbf{34}$$

3/ نستطيع حساب الانحراف الربيعي:

$$e_Q=\frac{Q_3-Q_1}{2}=\frac{34-25{,}2}{28{,}2}=\mathbf{4{,}4}$$

4/ نستطيع حساب معامل الاختلاف الثاني:

$$CV_2=\frac{Q_3-Q_1}{Me}\times 100=\frac{34-25{,}2}{28{,}2}\times 100=\mathbf{31{,}21}\%$$

التمرين (4–3): لنفرض أنه على إثر دراسة ميدانية تخص عدد الأبقار التي يملكها فلاحو إحدى البلديات أُخذت عينة من 36 فلاح فكانت النتائج كما يلي:

4 2 5 7 1 3 9 1 8 2 1 4 6 1 8 2 1 5 9 1 5 1 8 0
3 5 6 2 5 7 1 7 6 0 5 2 1 7 1 8

1/أحسب قيمة الوسط الحسابي؟

2/ أحسب قيمة الانحراف المعياري بثلاثة طرق ثم احسب التباين؟

3/ أحسب معامل الاختلاف؟

حل التمرين (4–3):

x_i	f_i	$f_i \times x_i$	x_i^2	$f_i \times x_i^2$	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
0	*2*	*0*	*0*	*0*	*-4*	*16*	*32*
1	*10*	*10*	*1*	*10*	*-3*	*9*	*90*
2	*5*	*10*	*4*	*20*	*-2*	*4*	*20*
3	*2*	*6*	*9*	*18*	*-1*	*1*	*2*
4	*2*	*8*	*16*	*32*	*0*	*0*	*0*
5	*6*	*30*	*25*	*150*	*1*	*1*	*6*
6	*3*	*18*	*36*	*108*	*2*	*4*	*12*
7	*4*	*28*	*49*	*196*	*3*	*9*	*36*
8	*4*	*32*	*64*	*256*	*4*	*16*	*64*
9	*2*	*18*	*81*	*162*	*5*	*25*	*50*
$\sum$	**40**	***160***	**-**	***952***	**-**	**-**	***312***

$$1.\ \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{160}{40} = \mathbf{4}$$

$$2.1.\ \delta_x = \sqrt{\frac{\sum f_i (c_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{312}{40}} = \sqrt{7{,}8} = \mathbf{2{,}79}$$

$$2.2.\ \delta_x = \sqrt{\frac{\sum f_i\, x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{952}{40} - 16} = \sqrt{23{,}8 - 16} = \sqrt{7{,}8} = \mathbf{2{,}79}$$

$$2.3.\ \delta_x = \sqrt{\frac{1}{\sum f_i}\left(\sum f_i x_i^2 - \frac{(\sum f_i\, x_i)^2}{\sum f_i}\right)} = \sqrt{\frac{1}{40}\left(952 - \frac{(160)^2}{40}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{40}(952 - 640)} = \sqrt{\frac{312}{40}} = \sqrt{7{,}8} = \mathbf{2{,}79}$$

$$2.4.\ V_x = \delta_x^2 = (2{,}79)^2 = \mathbf{7{,}78}$$

$$3.\ CV_1 = \frac{\delta_x}{\bar{x}} \times 100 = \frac{2{,}79}{4} \times 100 = \mathbf{69{,}75}$$

الفصل الخامس:

مقـــاييس الشكـــل

1/ العـــــــــــــــزوم

2/ معامــــل الالتـــــواء

3/ معامــــل التفرطـــح

4/ تمارين الفصل الخامس

الفصل الخامس:

مقاييـــــس الشكـــــــــــل

Caractéristiques de Forme

Measures of Shape

تمهيد الفصل:

إذا كانت مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت تسمح بتلخيص بيانات أي ظاهرة في صورة أرقام تعطي فكرة عن خصائص توزيع هذه البيانات ودرجة تجانسها أو اختلافها، فإن هذا الوصف تبقى تنقصه الدقة المطلوبة للتعرف على خواص التوزيع خاصة فيما يخص انتشار البيانات على المنحنى البياني الممثل لها من حيث التوائه وتفرطحه عن الوضع الطبيعي.

إن الحاجة لمعرفة كيفية انتشار البيانات وتوزيعها تدفعنا لحساب معاملات تعطينا التقديرات الكمية إما للالتواء (معامل الالتواء) أو التفرطح (معامل التفرطح). وهذا بدوره يتطلب معرفة كيفية حساب ما يُعرف بالعزوم.

1/ العزوم Les Moments

العزوم عبارة عن قيم احصائية تكون حول نقطة البدء (الصفر) أو حول المتوسط الحسابي $(\bar{x})$، أما رتبة العزم فتتحدد بدرجة القوة (الأس) التي ترفع إليها القيم أو انحرافاتها عن الصفر أو المتوسط الحسابي، وعلى هذا الأساس نميز نوعان من العزوم: العزوم اللامركزية والعزوم المركزية.

والعبارة العامة للعزوم هي:

$$\frac{\sum f_i(x_i-b)^r}{\sum f_i}=\sum Fr(x_i-b)^r \quad ; b=\begin{cases}0\\ \text{أو}\\ \bar{x}\end{cases}$$

1.1/ العزوم اللامركزية $(\boldsymbol{m_r})$: عبارة عن قيمة إحصائية من الرتبة r حيث $r\in N$ تتمركز حول الصفر $(b=0)$ وتختلف طرق حساب العزم اللامركزي باختلاف طبيعة البيانات.

1.1.1/ البيانات المنفصلة غير المتكررة:

$$m_r=\frac{\sum x_i^r}{\text{n}}$$

وتكون العزوم اللامركزية الأربعة الأولى في هذه الحالة كما يلي:

$$m_1=\frac{\sum x_i^1}{\text{n}}=\bar{x} \qquad m_2=\frac{\sum x_i^2}{\text{n}}=(MQ)^2 \qquad m_3=\frac{\sum x_i^3}{\text{n}} \qquad m_4=\frac{\sum x_i^4}{\text{n}}$$

مثال (5−1): أحسب العزوم اللامركزية الأربعة الأولى للبيانات التالية:

10   9   8   7   5   3   1

الحل:

x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4
1	1	1	1
3	9	27	81
5	25	125	625
7	49	343	2401
8	64	512	4096
9	81	729	6561
10	100	1000	10000
43	**329**	**2737**	**23765**

$$m_1 = \frac{\sum x_i^1}{\text{n}} = \frac{43}{7} = \mathbf{6,14}$$

$$m_2 = \frac{\sum x_i^2}{\text{n}} = \frac{329}{7} = \mathbf{47}$$

$$m_3 = \frac{\sum x_i^3}{\text{n}} = \frac{2737}{7} = \mathbf{391}$$

$$m_4 = \frac{\sum x_i^4}{\text{n}} = \frac{23765}{7} = \mathbf{3395}$$

2.1.1/ البيانات المنفصلة المتكررة:

$$m_r = \frac{\sum f_i x_i^r}{\sum f_i} = \sum Fr \times x_i^r$$

وتكون العزوم اللامركزية الأربعة الأولى في هذه الحالة كما يلي:

$$m_1 = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \bar{x} \qquad m_2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} = (MQ)^2 \qquad m_3 = \frac{\sum f_i x_i^3}{\sum f_i} \qquad m_4 = \frac{\sum f_i x_i^4}{\sum f_i}$$

3.1.1/ البيانات المتصلة:

$$m_r = \frac{\sum f_i c_i^r}{\sum f_i} = \sum Fr \times c_i^r$$

وتكون العزوم اللامركزية الأربعة الأولى في هذه الحالة كما يلي:

$$m_1 = \frac{\sum f_i c_i}{\sum f_i} = \bar{x} \qquad m_2 = \frac{\sum f_i c_i^2}{\sum f_i} = (MQ)^2 \qquad m_3 = \frac{\sum f_i c_i^3}{\sum f_i} \qquad m_4 = \frac{\sum f_i c_i^4}{\sum f_i}$$

مثال (5–2): أحسب العزوم اللامركزية الأربعة الأولى للبيانات التالية:

Classes	1 - 3	3 – 5	5 - 7	7 – 9	9 – 11
f_i	5	4	2	3	6

الحل:

Classes	f_i	c_i	$f_i \times c_i$	c_i^2	$f_i \times c_i^2$	c_i^3	$f_i \times c_i^3$	c_i^4	$f_i \times c_i^4$
1 - 3	*5*	*2*	*10*	*4*	*20*	*8*	*40*	*16*	*80*
3 - 5	*4*	*4*	*16*	*16*	*64*	*64*	*256*	*256*	*1024*
5 - 7	*2*	*6*	*12*	*36*	*72*	*216*	*432*	*1296*	*2592*
7 - 9	*3*	*8*	*24*	*64*	*192*	*512*	*1536*	*4096*	*12288*
9 - 11	*6*	*10*	*60*	*100*	*600*	*1000*	*6000*	*10000*	*60000*
$\sum$	***20***	-	***122***	-	***948***	-	***8264***	-	***75984***

$$m_1=\frac{\sum f_i c_i}{\sum f_i}=\bar{x}=\frac{122}{20}=\mathbf{6,1} \qquad m_2=\frac{\sum f_i c_i^2}{\sum f_i}=\frac{948}{20}=\mathbf{47,4}$$

$$m_3=\frac{\sum f_i c_i^3}{\sum f_i}=\frac{8264}{20}=\mathbf{413,2} \qquad m_4=\frac{\sum f_i c_i^4}{\sum f_i}=\frac{75984}{20}=\mathbf{3799,2}$$

2.1/ العزوم المركزية ($\boldsymbol{\mu_r}$): عبارة عن قيمة إحصائية من الرتبة r حيث $r \in N$ تتمركز حول الوسط الحسابي ($b=\bar{x}$) وتختلف طرق حساب العزم اللامركزي باختلاف طبيعة البيانات.

1.2.1/ البيانات المنفصلة غير المتكررة:

$$\mu_r=\frac{\sum (x_i-\bar{x})^r}{n}$$

وتكون العزوم المركزية الأربعة الأولى في هذه الحالة كما يلي:

$$\mu_1=\frac{\sum (x_i-\bar{x})^1}{n}=0 \quad \mu_2=\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n}=\delta_x^2 \quad \mu_2=\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n} \quad \mu_2=\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n}$$

2.2.1/ البيانات المنفصلة المتكررة:

$$\mu_r=\frac{\sum f_i (x_i-\bar{x})^r}{\sum f_i}=\sum Fr(x_i-\bar{x})^r$$

وتكون العزوم المركزية الأربعة الأولى في هذه الحالة كما يلي:

$$\mu_1=0 \qquad \mu_2=\frac{\sum f_i (x_i-\bar{x})^2}{\sum f_i}=\delta_x^2 \qquad \mu_3=\frac{\sum f_i (x_i-\bar{x})^3}{\sum f_i} \qquad \mu_4=\frac{\sum f_i (x_i-\bar{x})^4}{\sum f_i}$$

3.2.1/ البيانات المتصلة:

$$\mu_r=\frac{\sum f_i (c_i-\bar{x})^r}{\sum f_i}=\sum Fr(c_i-\bar{x})^r$$

وتكون العزوم المركزية الأربعة الأولى في هذه الحالة كما يلي:

$$\mu_1=0 \qquad \mu_2=\frac{\sum f_i (c_i-\bar{x})^2}{\sum f_i}=\delta_x^2 \qquad \mu_3=\frac{\sum f_i (c_i-\bar{x})^3}{\sum f_i} \qquad \mu_4=\frac{\sum f_i (c_i-\bar{x})^4}{\sum f_i}$$

مثال (5−3): بالعودة إلى المثال (5−2) أحسب العزوم المركزية الاربعة الأولى

الحل: وجدنا أن $\bar{x}=6{,}1$

$Classes$	f_i	c_i	$c_i-\bar{x}$	$(c_i-\bar{x})^2$	$f_i(c_i-\bar{x})^2$	$(c_i-\bar{x})^3$	$f_i(c_i-\bar{x})^3$	$(c_i-\bar{x})^4$	$f_i(c_i-\bar{x})^4$
1 - 3	*5*	*2*	*-4,1*	*16,81*	*84,05*	*-68,921*	*-344,61*	*282,576*	*1412,881*
3 - 5	*4*	*4*	*-2,1*	*4,41*	*17,64*	*-9,261*	*-37,04*	*19,448*	*77,792*
5 - 7	*2*	*6*	*-0,1*	*0,01*	*0,02*	*-0,001*	*-0,002*	*0,0001*	*0,0002*
7 - 9	*3*	*8*	*1,9*	*3,61*	*10,83*	*6,859*	*20,58*	*13,032*	*39,096*
9 - 11	*6*	*10*	*3,9*	*15,21*	*91,26*	*59,319*	*355,91*	*231,344*	*1388,065*
$\sum$	***20***	**-**	**-**	-	*203,8*	-	*-5,16*	-	*2917,834*

$$\mu_1 = \mathbf{0} \qquad \mu_2 = \frac{\sum f_i (c_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \delta_x^2 = \frac{203{,}8}{20} = \mathbf{10{,}19} \Rightarrow \delta_x = \sqrt{10{,}19} = 3{,}19$$

$$\mu_3 = \frac{\sum f_i (c_i - \bar{x})^3}{\sum f_i} = \frac{-5{,}16}{20} = \mathbf{0{,}258} \quad \mu_4 = \frac{\sum f_i (c_i - \bar{x})^4}{\sum f_i} = \frac{2917{,}834}{20} = \mathbf{145{,}89}$$

3.1/ العلاقة بين العزوم المركزية والعزوم اللامركزية:

يمكن حساب قيم العزوم المركزية بالاعتماد على العزوم اللامركزية من خلال العلاقات التالية:

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3 m_1 + 6m_2 m_1^2 - 3m_1^4$$

مثال(5–4): بالعودة لبيانات المثال (5–2) أحسب العزوم المركزية بالاعتماد على العزوم اللامركزية.

في المثال (5–2) تحصلنا على النتائج التالية:

$$m_1 = 6{,}1 \qquad m_2 = 47{,}4 \qquad m_3 = 413{,}2 \qquad m_4 = 3799{,}2$$

$$\mu_1 = \mathbf{0}$$

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = 47{,}4 - (6{,}1)^2 = \mathbf{10{,}19}$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3 = 413{,}2 - 3(47{,}4)(6{,}1) + 2(6{,}1)^3 = -\mathbf{0{,}258}$$

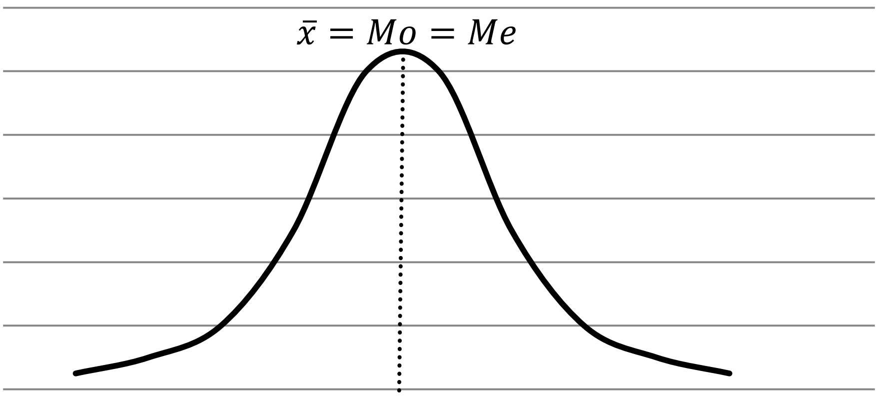
$$\begin{aligned}\mu_4 &= m_4 - 4m_3 m_1 + 6m_2 m_1^2 - 3m_1^4 \\ &= 3799{,}2 - 4(413{,}2)(6{,}1) + 6(47{,}4)(6{,}1)^2 - 3(6{,}1)^4 \\ &= 3799{,}2 - 10082{,}08 + 10582{,}524 - 4153{,}7523 = \mathbf{145{,}89}\end{aligned}$$

الملاحظ أن نفس النتائج تحصلنا عليها في المثال (5–3) لما قمنا بحساب العزوم المركزية بالاعتماد على القانون المباشر.

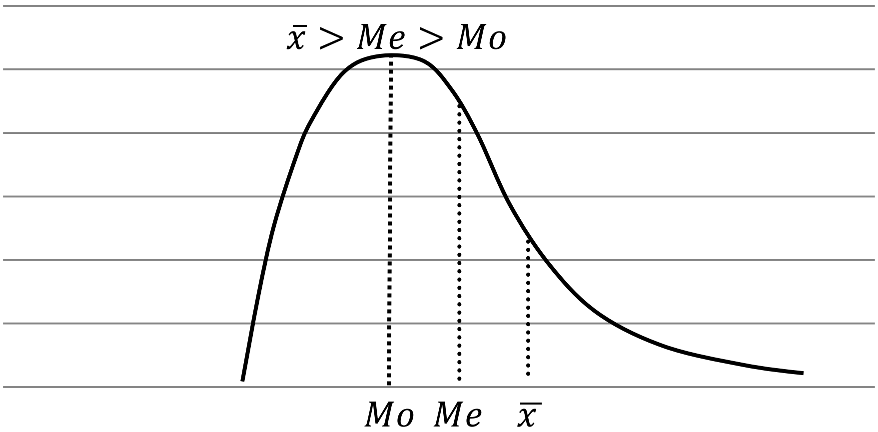
2/ معامل الالتواء L’Asymétrie

يقيس الالتواء (Skewness) درجة تماثل البيانات حول وسطها الحسابي، وبالتالي يتم تحديد شكل المنحنى الممثل للتوزيع التكراري للعينة المدروسة. فقد يكون التوزيع التكراري:

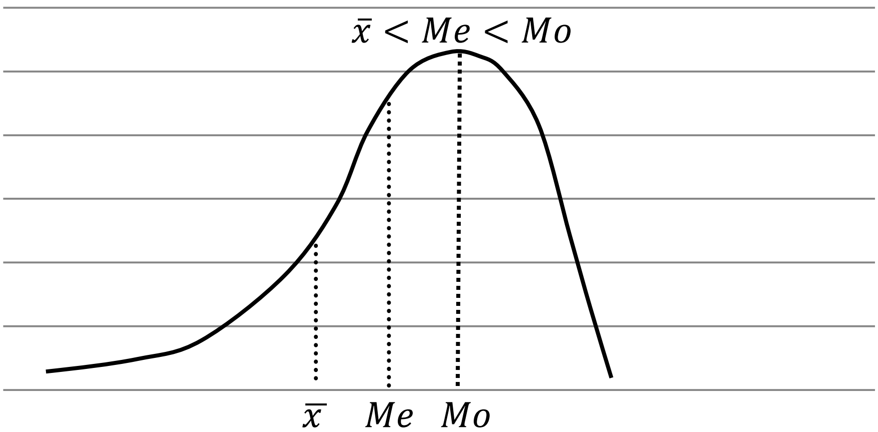
- متماثلاً (متناظر): في هذه الحالة يكون $\bar{x} = Mo = Me$ أي تكون 50% من القيم على يمين هذه المقاييس و50% المتبقية على يسارها، ويشبه شكل المنحنى البياني المتماثل شكل الجرس.



- موجب الالتواء: يكون المنحنى الممثل للتوزيع التكراري ممتدا أكثر نحو اليمين ويكون في هذه الحالة $\bar{x} > Me > Mo$ أي أن عدد القيم على يمين المنوال أكبر من عددها على يساره.



- سالب الالتواء: يكون المنحنى الممثل للتوزيع التكراري ممتدا أكثر نحو اليسار ويكون في هذه الحالة $\bar{x} < Me < Mo$ أي أن عدد القيم على يسار المنوال أكبر من عددها على يمينه.



من خلال مقارنة قيم الوسط الحسابي، الوسيط والمنوال يُمكن استنتاج اتجاه الالتواء اما سالب أو موجب أو متماثل، كما يُمكن معرفة ذلك أيضاً من خلال حساب معامل الالتواء Le coefficient d'asymétrie ويُحسب معامل الالتواء بثلاثة طرق واحدة دقيقة واثنتان تقريبيتان.

1.2/ الطريقة الدقيقة: يُطلق على معامل الالتواء في هذه الحالة اسم: معامل فيشر للالتواء Coefficient de Fisher ويُعبر عنه رياضياً بالعلاقة التالية:

$$\gamma_F = \frac{\mu_3}{\delta_x^3}$$

2.2/ الطريقة التقريبية:

1.2.2/ معامل بيرسون للالتواء: Coefficient de Pearson إذا كان التوزيع متماثل يكون لدينا $\bar{x} = Mo = Me$ أما إذا كان التوزيع قريب من التماثل (ملتوي) تصبح هذه المتوسطات غير متساوية وانطلاقاً من هذه الفكرة نستنتج طريقة حساب معامل بيرسون للالتواء وفقاً للعلاقتين التاليين:

- معامل بيرسون الأول للالتواء: $\gamma_1 = \frac{\bar{x} - M_o}{\delta_x}$
- معامل بيرسون الثاني للالتواء: $\gamma_2 = \frac{3(\bar{x} - M_e)}{\delta_x}$

2.2.2/ معامل يول للالتواء: Coefficient de Yule في حالة التوزيعات المفتوحة يتعذر علينا حساب معامل بيرسون للالتواء، وفي هذه الحالة يمكن حساب معامل الالتواء بالاعتماد على الربيعيات ويسمى معامل الالتواء الربيعي أو معامل يول للالتواء وفقاً للعلاقة التالية:

$$\gamma_3 = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_1)} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1}$$

ملاحظة: باستخدام إحدى المعاملات السابقة نجد:

- إذا كانت إشارة معامل الالتواء موجبة، يكون التوزيع ملتوياً إلى اليمين.
- إذا كانت إشارة معامل الالتواء سالبة، يكون التوزيع ملتوياً إلى اليسار.
- إذا كان معامل الالتواء معدوماً، يكون التوزيـــع متماثــل.

مثال (5−5): أحسب معامل الالتواء بالطريقة الدقيقة والطرق التقريبية لبيانات الجدول التكراري وماذا تستنتج:

Classes	10 - 20	20 – 40	40 - 50	50 – 60	60 - 80	80 - 90	90 - 100
f_i	20	80	10	20	40	20	10

بداية يجب حساب كل من الوسط الحسابي، الوسيط، الربيعيات، المنوال والعزوم.

$Classes$	f_i	c_i	$f_i \times c_i$	Fcc	$f_i^* = \frac{f_i}{K}$
10 - 20	20	15	300	20	2
20 - 40	80	30	2400	100	4
40 - 50	10	45	450	110	1
50 - 60	20	55	1100	130	2
60 - 80	40	70	2800	170	2
80 - 90	20	85	1700	190	2
90 - 100	10	95	950	200	1
$\sum$	**200**	-	**9700**	-	-

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i c_i}{\sum f_i} = \frac{9700}{200} = \mathbf{48,5}$$

$$Me = L_0 + \frac{\frac{\sum f_i}{2} - F_1}{F_2 - F_1} \times K = 20 + \frac{100 - 20}{100 - 20} \times 20 = \mathbf{40}$$

$$Q_1 = L_0 + \frac{\frac{\sum f_i}{4} - F_1}{F_2 - F_1} \times k = 20 + \frac{50 - 20}{100 - 20} \times 20 = \mathbf{27,5}$$

$$Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3\sum f_i}{4} - F_1}{F_2 - F_1} \times k = 60 + \frac{150 - 130}{170 - 130} \times 20 = \mathbf{70}$$

$$Mo = L_0 + \frac{(f_0 - f_1)}{(f_0 - f_1) + (f_0 - f_2)} \times k = 20 + \frac{(4 - 2)}{(4 - 2) + (4 - 1)} \times 10 = \mathbf{24}$$

$$\mu_2 = \frac{\sum f_i (c_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \frac{117550}{200} = 587,75 \Rightarrow \delta_x = \sqrt{587,75} = 24,24$$

$$\mu_3 = \frac{\sum f_i (c_i - \bar{x})^3}{\sum f_i} = \frac{1122150}{200} = 5610,75$$

$$\mu_4 = \frac{\sum f_i (c_i - \bar{x})^4}{\sum f_i} = \frac{125394962,5}{200} = 626974,81$$

$Classes$	f_i	c_i	$c_i - \bar{x}$	$(c_i - \bar{x})^2$	$f_i(c_i - \bar{x})^2$	$(c_i - \bar{x})^3$	$f_i(c_i - \bar{x})^3$	$(c_i - \bar{x})^4$	$f_i(c_i - \bar{x})^4$
10 - 20	20	15	-33,5	1122,25	22445	-37595,38	-751907,5	1259445,06	25188901,25
20 - 40	80	30	-18,5	342,25	27380	-6331,63	-506530	117135,06	9370805
40 - 50	10	45	-3,5	12,25	122,5	-42,88	-428,75	150,06	1500,625
50 - 60	20	55	6,5	42,25	845	274,63	5492,5	1785,06	35701,25
60 - 80	40	70	21,5	462,25	18490	9938,38	397535	213675,06	8547002,5
80 - 90	20	85	36,5	1332,25	26645	48627,13	972542,5	1774890,06	35497801,25
90 - 100	10	95	46,5	2162,25	21622,5	100544,63	1005446,25	4675325,06	46753250,63
$\sum$	**200**	-	-	-	**117550**	-	**1122150**	-	**125394962,5**

$$\gamma_F = \frac{\mu_3}{\delta_x^3} = \frac{5610,75}{(24,24)^3} = \mathbf{0,39} \qquad \gamma_1 = \frac{\bar{x} - Mo}{\delta_x} = \frac{48,5 - 24}{24,24} = \mathbf{1,01}$$

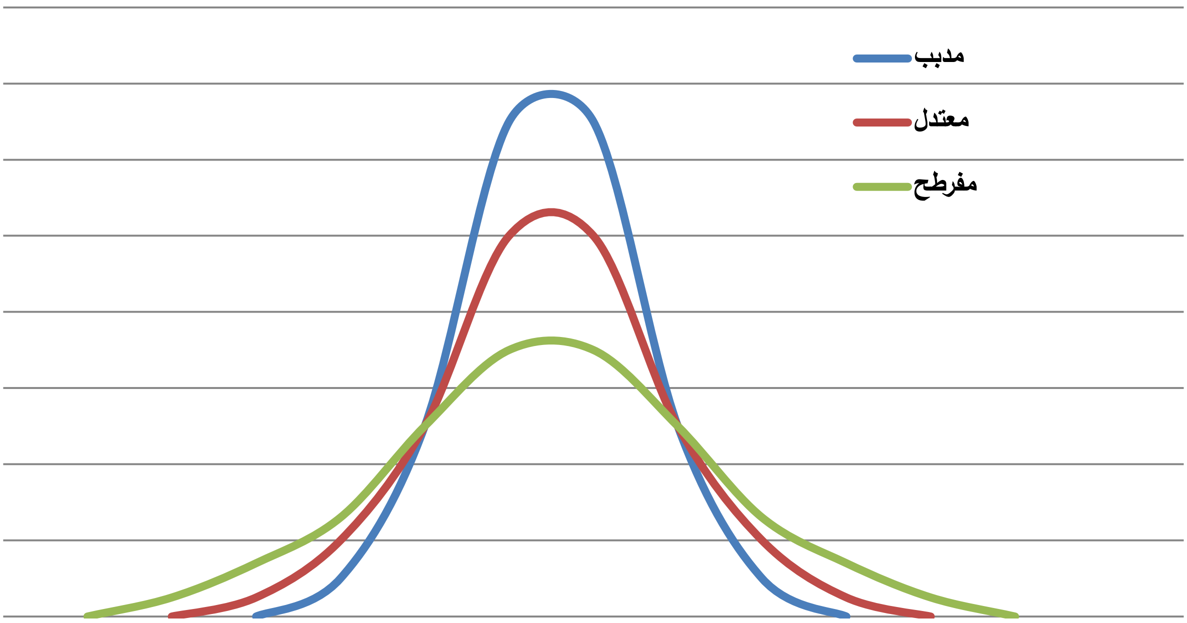
$$\gamma_2 = \frac{3(\bar{x} - Me)}{\delta_x} = \frac{3(48,5 - 40)}{24,24} = \mathbf{1,05}$$

$$\gamma_3 = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1} = \frac{70 + 27,5 - 2 \times 40}{70 - 27,5} = \mathbf{0,41}$$

الاستنتاج: بما أن إشارة معامل الالتواء موجبة رغم أنه محسوب بطرق مختلفة نستنتج أن التوزيع موجب الالتواء (يمتد نحو اليمين).

3/ معامل التفرطح L'Aplatissement

يقيس التفرطح (Kurtosis) درجة التحدب في منحنى التوزيع التكراري، فإذا كان التوزيع محدباً في قمته يُقال أنه حاد (مدبب) القمة وإذا كان منبسط القمة يقال عنه أنه مفرطح القمة وفي حالة أخرى يكون التوزيع معتدل (متوسط التفرطح) ويسمى بالتوزيع المتماثل (الطبيعي). ويمكن توضيح الحالات الثلاثة لاعتدال أو تدبب أو تفرطح قمة التوزيع في الشكل التالي:



يُقاس التفرطح بأداة احصائية تسمى معامل التفرطح Coefficient d'aplatissement وتُحسب قيمته بالطريقة التالية:

$$K=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}=\frac{\mu_4}{\delta_x^4}$$

- إذا كان $K=3$ فإن التوزيع يكون معتدل (متماثل القمة)؛
- إذا كان $K<3$ فإن التوزيع يكون مفرطح القمة؛
- إذا كان $K>3$ فإن التوزيع يكون مدبب القمة.

مثال (5−6): بالعودة إلى بيانات المثال (5−5) أحسب معامل التفرطح وماذا تستنتج؟

$$K=\frac{\mu_4}{\delta_x^4}=\frac{626974{,}81}{(24{,}24)^4}=\frac{626974{,}81}{345247{,}44}=\mathbf{1{,}82}$$

بما أن $K<3$ نستنتج أن التوزيع مفرطح القمة.

4/ تمارين الفصل الخامس:

التمرين (4−1): ليكن لدينا البيانات الإحصائية التالية:

$$\sum f_i x_i = 12960\,; \sum f_i x_i^2 = 1596800\,; \sum f_i x_i^3 = 210912000\,;$$
$$\sum f_i x_i^4 = 29527040000\,; \sum f_i = 200;\ Mo = 56;\ Me = 61;\ Q_1 = 56; Q_3 = 68$$

حدد قيمة كل من: معامل الالتواء العزمي، معامل بيرسون الأول والثاني للالتواء، معامل يول للالتواء ومعامل التفرطح العزمي.

حل التمرين (4−1):

1/ حساب العزوم اللامركزية:

$$m_1 = \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{12960}{200} = 64{,}8;\ m_2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} = \frac{1596800}{200} = 7984;\ m_3 = \frac{\sum f_i x_i^3}{\sum f_i}$$
$$= \frac{210912000}{200} = 1054560; m_4 = \frac{\sum f_i x_i^4}{\sum f_i} = \frac{29527040000}{200} = 147635200$$

2/ حساب العزوم المركزية بالاعتماد على العزوم اللامركزية:

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = 7984 - (64{,}8)^2 = 3784{,}96 \Rightarrow \delta_x = 61{,}52$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3 = 1054560 - 3 \times 7984 \times 64{,}8 + 2(64{,}8)^3 = 46665{,}98$$

$$\begin{aligned}\mu_4 &= m_4 - 4m_3 m_1 + 6m_2 m_1^2 - 3m_1^4 \\ &= 147635200 - 4 \times 1054560 \times 64{,}8 + 6 \times 7984(64{,}8)^2 - 3(64{,}8)^4 \\ &= 22548249{,}4\end{aligned}$$

3/ حساب معاملات الالتواء والتفرطح:

$$\gamma_F = \frac{\mu_3}{\delta_x^3} = \frac{46665{,}98}{(61{,}52)^3} = \mathbf{0,20} \qquad \gamma_1 = \frac{\bar{x} - Mo}{\delta_x} = \frac{64{,}8 - 56}{61{,}52} = \mathbf{0,14}$$

$$\gamma_2 = \frac{3(\bar{x} - Me)}{\delta_x} = \frac{3(64{,}8 - 61)}{61{,}52} = \mathbf{0,19}$$

$$\gamma_3 = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1} = \frac{68 + 56 - 2(61)}{68 - 56} = \mathbf{0,17}$$

$$K = \frac{\mu_4}{\delta_x^4} = \frac{22548249{,}4}{(61{,}52)^4} = \frac{22548249{,}4}{14324032{,}8} = \mathbf{1,57}$$

4/ **الاستنتاج:** من خلال النتائج المتحصل عليها نستنتج أن التوزيع موجب الالتواء (يمتد نحو اليمين) ومفرطح القمة.

التمرين (4−2): ليكن لدينا التوزيع التكراري التالي:

Classes	10 - 20	20 – 30	30 - 40	40 – 50	50 - 60	60 – 70	70 - 80
$fr(\%)$	15	25	20	15	10	5	10

المطلوب:

1/ أحسب الوسط الحسابي، الوسيط والمنوال. ماذا تلاحظ وماذا تستنتج؟

2/ أحسب معامل الالتواء العزمي ومعامل التفرطح العزمي؟

حل التمرين (4−2):

1/ حساب الوسط الحسابي، الوسيط والمنوال.

$Classes$	$fr(\%)$	f_i	c_i	$f_i \times c_i$	Fcc
10 - 20	15	18	15	270	18
20 - 30	25	30	25	750	48
30 - 40	20	24	35	840	72
40 - 50	15	18	45	810	90
50 - 60	10	12	55	660	102
60 - 70	5	6	65	390	108
70 - 80	10	12	75	900	120
$\sum$	**100**	**120**	-	**4620**	-

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i c_i}{\sum f_i} = \frac{4620}{120} = \mathbf{38,5}$$

$$Me = L_0 + \frac{\frac{\sum f_i}{2} - F_1}{F_2 - F_1} \times K$$
$$= 30 + \frac{60 - 48}{72 - 48} \times 10 = \mathbf{35}$$

$$Mo = L_0 + \frac{(f_0 - f_1)}{(f_0 - f_1) + (f_0 - f_2)} \times k$$
$$= 20 + \frac{(30 - 18)}{(30 - 18) + (30 - 24)} \times 10 = \mathbf{26,67}$$

نلاحظ أن $\bar{x} > Me > Mo$ ومنه **نستنتج** أن التوزيع موجب الالتواء (يمتد نحو اليمين)

2/ حساب معامل الالتواء العزمي ومعامل التفرطح العزمي.

بداية لا بد من حساب قيم العزوم المركزية

$$\mu_2 = \frac{\sum f_i (c_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \frac{39930}{120} = 332,75 \Rightarrow \delta_x = \sqrt{332,75} = 18,24$$

$$\mu_3 = \frac{\sum f_i (c_i - \bar{x})^3}{\sum f_i} = \frac{445590}{120} = 3713,25$$

$$\mu_4 = \frac{\sum f_i (c_i - \bar{x})^4}{\sum f_i} = \frac{31668877,5}{120} = 263907,31$$

$Classes$	f_i	c_i	$c_i - \bar{x}$	$(c_i - \bar{x})^2$	$f_i(c_i - \bar{x})^2$	$(c_i - \bar{x})^3$	$f_i(c_i - \bar{x})^3$	$(c_i - \bar{x})^4$	$f_i(c_i - \bar{x})^4$
10 - 20	18	15	-23,5	552,25	9940,5	-12977,88	-233601,75	304980,06	5489641,125
20 - 30	30	25	-13,5	182,25	5467,5	-2460,38	-73811,25	33215,06	996451,875
30 - 40	24	35	-3,5	12,25	294	-42,88	-1029	150,06	3601,5
40 - 50	18	45	6,5	42,25	760,5	274,63	4943,25	1785,06	32131,125
50 - 60	12	55	16,5	272,25	3267	4492,13	53905,5	74120,06	889440,75
60 - 70	6	65	26,5	702,25	4213,5	18609,63	111657,75	493155,06	2958930,375
70 - 80	12	75	36,5	1332,25	15987	48627,13	583525,5	1774890,06	21298680,75
$\sum$	**120**	-	-	-	**39930**	-	**445590**	-	**31668877,5**

$$\gamma_F = \frac{\mu_3}{\delta_x^3} = \frac{3713,25}{(18,24)^3} = \frac{3713,25}{6068,4} = \mathbf{0,61}$$

بما أن إشارة معامل الالتواء العزمي موجبة هذا ما يؤكد أن التوزيع موجب الالتواء (وهو ما قد استنتجناه سابقاً من خلال مقارنة قيم الوسط الحسابي، الوسيط والمنوال).

$$K = \frac{\mu_4}{\delta_x^4} = \frac{263907{,}31}{(18{,}24)^4} = \frac{263907{,}31}{110687{,}69} = \mathbf{2,38}$$

بما أن $K < 3$ نستنتج أن التوزيع مفرطح القمة.

التمرين (4−3): ليكن لدينا التوزيع التكراري التالي:

x_i	0	1	2	3
fr	0,216	0,432	0,288	0,064

أحسب معامل الالتواء العزمي ومعامل التفرطح العزمي وماذا تستنتج؟

حل التمرين (4−3):

x_i	fr	$fr \times x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$fr(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^3$	$fr(x_i - \bar{x})^3$	$(x_i - \bar{x})^4$	$fr(x_i - \bar{x})^4$
0	0,216	0	-1,2	1,44	0,311	-1,73	-0,373	2,074	0,4479
1	0,432	0,432	-0,2	0,04	0,017	-0,01	-0,003	0,002	0,0007
2	0,288	0,576	0,8	0,64	0,184	0,51	0,147	0,410	0,1180
3	0,064	0,192	1,8	3,24	0,207	5,83	0,373	10,498	0,6718
$\sum$	**1**	$\boldsymbol{\bar{x} = 1,2}$	-	-	$\boldsymbol{\mu_2 = 0,72}$	-	$\boldsymbol{\mu_3 = 0,144}$	-	$\boldsymbol{\mu_4 = 1,138}$

$$\gamma_F = \frac{\mu_3}{\delta_x^3} = \frac{0{,}144}{(0{,}85)^3} = \mathbf{0,24}\ ;\quad K = \frac{\mu_4}{\delta_x^4} = \frac{1{,}138}{(0{,}85)^4} = \mathbf{2,19}\quad ; \mu_2 = 0{,}72 \Rightarrow \delta_x = 0{,}85$$

نستنتج أن هذا المنحى الممثل لهذا التوزيع موجب الالتواء (يمتد نحو اليمين) ومفرطح القمة لأن معامل التفرطح أقل من ثلاثة.

ملخص قوانين

الإحصاء 1

1/ مقاييس النزعة المركزيـة

2/ مقاييـــــس التشتـــت

3/ مقاييـــــس الشكــــل

Caractéristiques de Tendance Centrale مقاييـــس النزعــة المركزيـــة

إعداد: د/ مشعلي بلال	التعريــــــف	طرق الحساب في حالة البيانات المنفصلة	طرق الحساب في حالة البيانات المتصلـــة
المتوسط الحسابي La Moyenne Arithmétique $(\bar{x})$	مجموعة من القيم مقسوما على عددها (معدل القيم).	**1- البيانات غير المتكررة:** $\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}$ **2- البيانات المتكررة:** $\bar{x}=\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}=\sum fr_i x_i$	**1- الطريقة المباشرة:** $\bar{x}=\frac{\sum f_i c_i}{\sum f_i}=\sum fr_i c_i$ **2- طريقة الوسط الفرضي:** $\bar{x}=\alpha+\frac{\sum f_i w_i}{\sum f_i}$ **3- طريقة الانحرافات المختصرة:** $\bar{x}=\alpha+\frac{\sum f_i w_i'}{\sum f_i}\times k$
الوسيـــــــط La Médiane (Me)	قيمة المتغير الإحصائي الذي يفصل السلسلة الإحصائية إلى قسمين متساويين بعد ترتيب القيم تصاعدياً أو تنازلياً.	**1- البيانات غير المتكررة:** نرتب البيانات تصاعدياً أو تنازليا ثم نحدد رتبة الوسيط Rme **- إذا كان عدد القيم (n) فردياً:** $Rme=\frac{n+1}{2}$ وتكون قيمة Me هي القيمة التي ترتيبها Rme. **- إذا كان عدد القيم (n) زوجيا:** نحدد قيمتين للوسيط الأولى ترتيبها $Rme=\frac{n}{2}$ وهي Me_1 والثانية ترتيبها $Rme=\frac{n}{2}+1$ وهي Me_2 وبالتالي قيمة الوسيط هي: $Me=\frac{Me_1+Me_2}{2}$. **2- البيانات المتكررة:** نحدد رتبة الوسيط $Rme=\frac{\sum f_i}{2}$ بين قيم التكرارات المتجمعة الصاعدة، القيمة المقابلة هي الوسيط. **ملاحظة**: إذا كانت قيمة Rme موجودة بين قيم Fcc الوسيط يكون متوسط القيمتين السابقة واللاحقة لرتبة الوسيط.	نجعل التوزيع التكراري توزيعاً صاعدا أو نازلاً ثم نحدد رتبة الوسيط $Rme=\frac{\sum f_i}{2}$ حيث تستخدم رتبة الوسيط في تحديد الفئة التي يقع فيها الوسيط وتدعى بالفئة الوسيطية ثم نحسب الوسيط باستخدام العلاقة التالية في حالة التكرار المتجمع الصاعد Fcc. $Me=L_0+\frac{\frac{\sum f_i}{2}-F_1}{F_2-F_1}\times K$ **حيث:** L_0: الحد الأدنى للفئة الوسيطية؛ F_1: التكرار المتجمع الصاعد السابق لرتبة الوسيط؛ F_2: التكرار المتجمع الصاعد اللاحق لرتبة الوسيط؛ K: طول الفئة الوسيطية.
المنـــــــوال Le Mode (Mo)	هـو القيمـة الأكثـر تكـراراً أو شيوعاً بين قيم المشاهدات.	- إذا لم تتكرر القيم فلا وجود للمنوال؛ - إذا تكرر أحد القيم أكبر من البقية فهناك منوال واحد؛ - إذا كان لقيمتين نفس التكرار فيكون لمجموعة القيم منوالان.	$Mo=L_0+\frac{(f_0-f_1)}{(f_0-f_1)+(f_0-f_2)}\times K$ **حيث:** L_0: الحد الأدنى للفئة المنوالية، f_0: التكرار المطلق للفئة المنوالية، f_1: التكرار المطلق للفئة قبل الفئة المنوالية، f_2: التكرار المطلق للفئة بعد الفئة المنوالية، K: طول الفئة المنوالية.
المتوسط الهندسي (G) La M Géométrique	هو عبارة عن الجذر النوني لجداء القيم x_i أو c_i.	القيم غير المتكررة (البسيط) $logG=\frac{\sum\log x_i}{n}$ القيم المتكررة (المرجح) $logG=\frac{\sum f_i\log x_i}{\sum f_i}=\sum fr_i\log x_i$	$logG=\frac{\sum f_i\log c_i}{\sum f_i}=\sum fr_i\log c_i \Rightarrow G=10^{logG}$
المتوسط التوافقي (H) La M Harmonique	هو مقلوب المتوسط الحسابي لمقلوب القيم x_i أو c_i.	القيم غير المتكررة (البسيط) $H=\frac{n}{\sum\frac{1}{x_i}}$ القيم المتكررة (المرجح) $H=\frac{\sum f_i}{\sum\frac{f_i}{x_i}}$	$H=\frac{\sum f_i}{\sum\frac{f_i}{c_i}}$
المتوسط التربيعي (MQ) La M Quadratique	هو الجذر التربيعي للمتوسط الحسابي لمربعات القيم x_i أو c_i.	القيم غير المتكررة (البسيط) $MQ=\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$ القيم المتكررة (المرجح) $MQ=\sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i}}=\sqrt{\sum fr_i x_i^2}$	$MQ=\sqrt{\frac{\sum f_i c_i^2}{\sum f_i}}=\sqrt{\sum fr_i c_i^2}$

Caractéristiques de dispersion مقاييس التشـــتت

إعداد: د/ مشعلي بلال	التعريـــــف	طرق الحساب في حالة البيانات المنفصلـــة	طرق الحساب في حالة البيانات المتصلـــــــــــة
الانحراف المتوســط **L'écart moyen** $e_{\bar{X}}$	متوسط القيم المطلقة لانحرافات القيم عن متوسطها الحسابي	**- بيانات غير متكررة:** $e_{\bar{x}} = \frac{\sum\lvert x_i-\bar{x}\rvert}{n}$ **- بيانات متكررة:** $e_{\bar{x}} = \frac{\sum f_i\lvert x_i-\bar{x}\rvert}{\sum f_i} = \sum fr_i\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	$e_{\bar{x}} = \frac{\sum f_i\lvert c_i-\bar{x}\rvert}{\sum f_i} = \sum_{i=1}^{n} fr_i\lvert c_i-\bar{x}\rvert$
الانحراف الوسيــط **L'écart médian** e_{Me}	متوسط القيم المطلقة لانحرافات القيم عن وسيطها	**- بيانات غير متكررة:** $e_{Me} = \frac{\sum\lvert x_i-Me\rvert}{n}$ **- بيانات متكررة:** $e_{Me} = \frac{\sum f_i\lvert x_i-Me\rvert}{\sum f_i} = \sum fr_i\lvert x_i-Me\rvert$	$e_{Me} = \frac{\sum f_i\lvert c_i-Me\rvert}{\sum f_i} = \sum_{i=1}^{n} fr_i\lvert c_i-Me\rvert$
الانحراف الربيعي **L'écart quartile** e_Q	نصف المدى بين الربيـــع الأول Q_1 والربيع الثالث Q_3	في حالة البيانات غير المتكررة وعدد المفردات فردي نجد: **الربيع الأول:** ترتيب Q_1 هو: $\frac{n+1}{4}$ ومنه قيمة الربيع الأول هي القيمة التي تقع في هذا الترتيب بعد ترتيب القيم. **الربيع الثالث:** ترتيب Q_3 هو: $\frac{3(n+1)}{4}$ ومنه قيمة الربيع الثالث هي القيمة التي تقع في هذا الترتيب بعد ترتيب القيم. ومنه قيمة الانحراف الربيعي هي: $e_Q = \frac{Q_3-Q_1}{2}$	بالاعتماد على قيم التكرار المتجمع الصاعد Fcc نحسب: **الربيع الأول:** $RQ_1 = \frac{\sum f_i}{4} \Rightarrow Q_1 = L_0 + \frac{\frac{\sum f_i}{4}-F_1}{F_2-F_1} \times k$ **الربيع الثالث:** $RQ_3 = \frac{3\sum f_i}{4} \Rightarrow Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3\sum f_i}{4}-F_1}{F_2-F_1} \times k$ ومنه قيمة الانحراف الربيعي هي: $e_Q = \frac{Q_3-Q_1}{2}$
الانحراف المعياري **L'écart type** S_x δ_x	الجــذر التربيعــي لمتوســط مجمــوع مربعـات انحرافـات القيم عـن متوسـطها الحسابي	**- بيانات غير متكررة:** $\delta_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}}$; $S_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right]}$ **- بيانات متكررة:** $\delta_x = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum f_i}}$ $S_x = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{(\sum f_i)-1}}$	$\delta_x = \sqrt{\frac{\sum f_i(c_i-\bar{x})^2}{\sum f_i}}$ $S_x = \sqrt{\frac{\sum f_i(c_i-\bar{x})^2}{(\sum f_i)-1}}$ هناك طرق أخرى لحساب S_x و δ_x *راجع المحاضرة* **ملاحظة:** مربع الانحراف المعياري يسمى التباين $V_x = \delta_x^2$
معامل الاختلاف **Coefficient de variation** CV	معامل الاختلاف الأول ويرمز له بالرمز: CV_1 يدعى أيضا الانحراف المعياري النسبي ومعامل الاختلاف الثاني ويرمز له بالرمز: CV_2 يدعى أيضا الانحراف الربيعي النسبي. يستخدم هاذين المعاملين النسبيين في حالة المقارنة بين تشتت توزيعات مختلفة أو نفس التوزيع لكن على مستويات مختلفة.		$CV_1 = \frac{S_x}{\bar{x}} \times 100$ $CV_2 = \frac{Q_3-Q_1}{Me} \times 100$

Caractéristiques de Forme مقاييس الشكـــل

إعداد: د/ مشعلي بلال	التعريــــــف	طرق الحساب في حالة البيانات المنفصلة	طرق الحساب في حالة البيانات المتصلــة
العزوم اللامركزية	يعرف العزم اللامركزي من الرتبة r $(r\epsilon N)$ بالعلاقات التالية	**- بيانات غير مكررة:** $m_r = \frac{\sum x_i^r}{n}$ **- بيانات مكررة:** $m_r = \frac{\sum f_i x_i^r}{\sum f_i}$	$m_r = \frac{\sum f_i c_i^r}{\sum f_i}$
العزوم المركزية	يعرف العزم المركزي من الرتبة r $(r\epsilon N)$ بالعلاقات التالية	**- بيانات غير مكررة:** $\mu_r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^r}{n}$ **- بيانات مكررة:** $\mu_r = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^r}{\sum f_i}$	$\mu_r = \frac{\sum f_i (c_i - \bar{x})^r}{\sum f_i}$
العلاقة بين العزوم اللامركزية والعزوم المركزية	$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$	$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$	$\mu_2 = m_2 - m_1^2$ $\mu_1 = 0$
الالتـــــــــــــواء **L'Asymétrie** **Skewness**	يقيس درجة تماثل البيانات حول متوسطها الحسابي	**الطريقة الدقيقة:** معامـــــل فيشـــر للالتـــــواء: $\gamma_F = \frac{\mu_3}{\delta_x^3}$ **الطرق التقريبية:** معامل بيرسون للالتواء الأول: $\gamma_1 = \frac{\bar{x} - M_o}{\delta_x}$ معامل بيرسون للالتواء الثاني: $\gamma_2 = \frac{3(\bar{x} - M_e)}{\delta_x}$ معامـــــل يـــول للالتـــواء: $\gamma_3 = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_1)}$	**باستخدام إحدى المعاملات السابقة نجد:** - إذا كان معامل الالتواء موجبا، يكون التوزيع ملتوياً إلى اليمين. - إذا كان معامل الالتواء سالباً، يكون التوزيع ملتوياً إلى اليسار. - إذا كان معامل الالتواء معدوماً، يكون التوزيـــع متماثـــل.
التفرطـــــح **L'Aplatissement** **Kurtosis**	يقيس درجة تدبب قمة التوزيع	معامل التفرطح: $K = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\delta_x^4}$ إذا كان $K < 3$ التوزيع مفرطح	إذا كان $K = 3$ التوزيع معتدل إذا كان $K > 3$ التوزيع مدبب

قائمة المراجع Bibliographie

1/ بشيشي وليد، **الإحصاء 1**، مطبوعة بيداغوجية، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة 8 ماي 1945 – قالمة، 2016/2015.

2/ بوذريع صاليحة، **محاضرات في الإحصاء الوصفي – الإحصاء 1**، مطبوعة بيداغوجية، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة حسيبة بن بوعلي – الشلف، 2017/2016.

3/ بيري نورة، **الإحصاء 1**، مطبوعة بيداغوجية، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة 8 ماي 1945 – قالمة، 2017/2016.

4/ حوري زهية، **الإحصاء الوصفي دروس وتمارين محلولة**، الطبعة الأولى، منشورات مكتبة اقرأ، قسنطينة – الجزائر، 2013.

5/ حيدوشي عاشور، **محاضرات في الإحصاء الوصفي**، مطبوعة بيداغوجية، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة أكلي محند أولحاج – البويرة، 2016/2015.

6/ سعدو عادل، **محاضرات وتطبيقات في الإحصاء 1 غير منشورة**، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة 8 ماي 1945 – قالمة.

7/ طبيّه أحمد عبد السميع، **مبادئ الإحصاء**، الطبعة الأولى، دار البداية ناشرون وموزعون، عمان، 2007.

8/ فليفل كامل وحمدان فتحي، **الإحصاء**، الطبعة الثانية، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان – الأردن 2012.

9/ المغربي محمد جبر، **الإحصاء الوصفي**، الطبعة الأولى، المكتبة العصرية للنشر والتوزيع، القاهرة – مصر، 2007.

10/ موساوي عبد النور وبركان يوسف، الإحصاء 1 **Statistique**، دار العلوم للنشر التوزيع، عنابة – الجزائر، 2009.

11/ CHEKROUN Abdennasser, **Statistiques descriptives et exercices**, Imprimé pédagogique Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen, 2017-2018.

12/ CHIBAT Ahmed, **Cours de Statistique**, Imprimé pédagogique, Faculte de Science, Université Mentouri – Constantine, Sans année d'édition.

13/ ILLOWSKY Barbara and DEAN Susan, **Introductory Statistics**, openstax, Houston, Texas (USA), 2017.

14/ LEBOUCHER Lucien et VOISIN Marie-José, **Introduction à la statistique descriptive**, CÉPADUÈS-ÉDITIONS, Toulouse (France), 2011.